<36635608850019

<36635608850019

Bayer. Staatsbibliothek

R

Praktische Anweisung
zur
algebraischen
und
combinatorischen Rechnung
in Beziehung
auf bürgerliche Geschäfte,
mit einer methodisch geordneten
Auswahl von brauchbaren Beispielen
zur Selbstübung
und für den öffentlichen und Privatunterricht

von

Johann Wolfgang Müller,
Lehrer der Mathematik an der Oberrealschule
zu Nürnberg.

[1]

Nürnberg,
bei Gustav Philipp Jacob Bieling
1810.

4. b. E.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Man ist zwar überzeugt, daß die Anwendung der algebraischen Rechnung auf Vorfälle, die sich im bürgerlichen Leben ereignen, von großem Nutzen ist; man glaubt aber, der algebraische Calcul, besonders derjenige, bei dem man sich der Buchstaben bedient, sey mit solchen Schwierigkeiten verknüpft, daß es große Anstrengung erfordere, wenn man desselben mächtig werden will. Die gegenwärtige Schrift hat den Endzweck, diesem Vorurtheil zu begegnen. Sie enthält eine allgemein faßliche Anweisung, die algebraische Verf hrungsart bei Erbschaftsrechnungen, der Gesellschaftsrechnung, der Zeitrechnung, der Vermischungsrechnung, und bei andern in den bürgerlichen Geschäften und dem Handel vorkommenden Fällen, da anzuwenden, wo die gewöhnlichen Vorschriften unzureichend sind, das Resultat richtig zu bestimmen.

Zugleich enthält der Abschnitt von den Buchstabengleichungen eine deutliche Anweisung, wie man bei vorkommenden Fällen die Regeln der Berechnung selbst erfinden kann. Dadurch wird der Nutzen der Buchstabenrechnung augenscheinlich dar-

gethan. — Die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die man in wenigen Schriften bearbeitet findet, wird mehrern Lesern willkommen seyn.

Ueberall ist eine hinlängliche Menge brauchbarer Exempel, zur Selbstübung, oder auch zum Gebrauch bei dem öffentlichen und Privatunterricht, in methodischer Ordnung beigefügt, und dadurch dem Mangel, der sich bei andern Lehrbüchern der Algebra findet, abgeholfen worden. Ich habe nemlich alle diejenigen Exempel zusammen gestellt, welche eine Auflösung erfordern, die der ähnlich ist, die bei der Aufgabe, der sie angehängt sind, ausführlich gezeigt wird.

Uebrigens setze ich bei denen, die sich dieser Schrift bedienen wollen, sehr wenige arithmetische Vorkenntnisse voraus, nemlich im allgemeinen blos Fertigkeit in den vier Species in ganzen Zahlen; und bei verschiedenen Aufgaben, Regel de Tri und Gesellschaftsrechnung. Die übrigen Vorkenntnisse, z. B. Quadratwurzelausziehung, Lehre von den entgegengesetzten Größen u. dergl. werden im Buch selbst am gehörigen Ort gelehrt.

Nürnberg,
den 4ten Sept. 1809.

Joh. Wolfg. Müller.

Einleitung.

In der Mathematik bedient man sich gewisser Zeichen, um verschiedene Rechnungsoperationen anzudeuten. Das Zeichen der Addition ist +, z. B. 3 + 4 + 9 bedeutet die Summe der Zahlen 3, 4 und 9. Das Zeichen der Subtraction ist —, dieses Zeichen wird so zwischen die Zahlen gesetzt, daß der Minuend links, der Subtrahend rechts zu stehen kommt. Z. B. 13 — 7 wird gelesen 13 weniger 7, und bedeutet, daß 7 von 13 subtrahirt werden soll. Das Zeichen der Multiplication ist ein Punkt, der zwischen die beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt werden sollen, gesetzt wird. Z. B. 7. 6 heißt 6mal 7, ferner 12. 8 bedeutet 8mal 12. Der Multiplicand und Multiplicator heißen zusammen die Factoren, und die Zahl, welche gefunden wird, das Product.

Das Zeichen der Division ist, daß man den Quotienten als einen Bruch schreibt, dessen Zähler der Dividend, und der Nenner der Divisor ist. Z. B. $\frac{17}{9}$ bedeutet 17 dividirt durch 9, ferner $\frac{13}{7}$ bedeutet, 13 dividirt durch 7.

Das Zeichen der Gleichheit ist = welches zwischen die Größen, die einander gleich sind, gesetzt wird. Z. B. $8 + 6 = 14$, dieß wird gelesen: die Summe von 8 und 6 ist gleich 14. Ferner $23 - 11 = 12$, dieß wird gelesen, 23 weniger 11 ist gleich 12.

Auch gebraucht man bei mathematischen Rechnungen häufig die Decimalbrüche. Ein Decimalbruch ist nemlich ein solcher Bruch, dessen Nenner 10, oder 100, oder 1000, kurz eine 1 mit mehrern Nullen ist. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{89}{100}$, $\frac{367}{1000}$, $\frac{73}{10000}$ u. s. f. sind Decimalbrüche. Man kann solche schreiben, ohne daß man den Nenner ansetzt, wenn man die Stelle der Einer mit einem Comma bezeichnet. Z. B. 3,41 bedeutet $3\frac{41}{100}$, 15,786 bedeutet $15\frac{786}{1000}$, 0,8 bedeutet $\frac{8}{10}$, (weil nemlich bei $\frac{8}{10}$ keine Einer vorhanden sind, so wird ihre Stelle mit Null nebst den

vor-

vorgesetzten Comma bezeichnet.) Ferner 0,368 bedeutet $\frac{368}{1000}$ oder 0 Einer, 3 Zehntel, 6 Hundertel, und 8 Tausendel. Endlich 0,04763 bedeutet $\frac{4763}{100000}$, oder 0 Einer, 0 Zehntel, 4 Hundertel, 7 Tausendel, 6 Zehntausendel, 3 Hunderttausendel. Man nennt die Stellen, die sich rechter Hand des Comma befinden, die Decimalstellen. So hat der Bruch 0,4365 vier Decimalstellen, und der Bruch 6,08569 fünf Decimalstellen. Um nun einen Decimalbruch bequem zu lesen, darf man sich nur vorstellen, zu dem Bruch gehöre ein Nenner, der eine 1 mit so vielen Nullen hat, als Decimalstellen im Bruch befindlich sind.

Noch ist zu bemerken, daß wenn eine Zahl mehreremal als Factor gesetzt wird, das Product eine Potenz genennt wird. Z. B. da 5 mal 5 zum Product 25 giebt, so heißt 25 die zweite Potenz von 5: da 5 mal 5 zum Product 125 giebt: so heißt 125 die dritte Potenz von 5, u. s. f. Eben so, da 6 mal 6 = 36 ist, so heißt 36 die zweite Potenz von 6. Ferner, da 6 mal 6 mal 6 = 216 ist, so heißt 216 die dritte Po-

tenz von 6. Ueberhaupt, wenn eine Zahl im allgemeinen mit x bezeichnet wird, so heißt x mal x die zweite Potenz von x, und x mal x mal x, die dritte Potenz von x, und s. f. Die zweite Potenz von x deutet man an, durch ein 2 welches rechts über den Buchstaben gesetzt wird, nemlich so: x^2, die dritte Potenz von x, deutet man durch 3, welches gleichfalls rechts über den Buchstaben gesetzt wird, an, nemlich so: x^3, u. s. f. Diese Bezeichnung x^2, x^3, muß man wohl unterscheiden von 2x und 3x. Denn 2x bedeutet, man soll x mit 2 multipliciren, oder zweimal nehmen, aber x^2 bedeutet, man soll x mit sich multipliciren: ferner 3x bedeutet, man soll x mit 3 multipliciren, oder dreimal nehmen, aber x^3 bedeutet, daß man ein Product aus drei gleichen Factoren machen soll, so nemlich, daß ieder Factor = x ist.

Inhaltsanzeige.

Seite

Einleitung - - - - - V

Erster Abschnitt.

Von den Gleichungen überhaupt - - 1

Zweiter Abschnitt.

Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit einer einzigen unbekannten Größe - - 8

Dritter Abschnitt.

Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit zwei unbekannten Größen - - - 60

Vierter Abschnitt.

Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit drei und mehr unbekannten Größen - - 99

Fünfter Abschnitt.

Unbestimmte Aufgaben, welche blos auf Zahlengleichungen vom ersten Grad führen 120

Sechs-

Seite

Sechster Abschnitt.

Quadratische Zahlengleichungen, oder Zahlengleichungen des zweiten Grads - 156

A. Von den reinen quadratischen Zahlengleichungen - - - - 172

B. Von den unreinen oder gemischten quadratischen Zahlengleichungen - 177

Siebenter Abschnitt.

Buchstabenrechnung - - - - 197

1) Buchstabengrößen zu addiren - - 198

2) Zusammengesetzte Buchstabengrößen zu addiren - - - - 200

3) Buchstabengrößen zu subtrahiren - 201

4) Zusammengesetzte Buchstabengrößen zu subtrahiren - - - - 203

5) Buchstabengrößen zu multipliciren - 204

6) Buchstabengrößen zu dividiren - - 207

7) Buchstabenpotenzen und Wurzeln - 219

8) Buchstabenproducte zu zerlegen - - 221

Achter Abschnitt.

Buchstabengleichungen - - - 222

Seite

Neunter Abschnitt.

Arithmetische Progressionen - - - 245

Zehnter Abschnitt.

Von den Permutationen oder Versetzungen, ohne Wiederholungen - - - 275

Zusatz zur Darstellung der Permutationscomplexionen - - - - 323

Eilfter Abschnitt.

Von den Combinationen, ohne Wiederholungen - - - - - 280

1) Von den Verbindungen zu zweien, oder den Combinationen für die Binionen 280

2) Von den Verbindungen zu dreien, oder den Combinationen für die Ternionen - - - - - 283

3) Von den Verbindungen zu vieren, oder den Combinationen für die Quaternionen - - - - 285

4) Von den Verbindungen zu fünfen, oder den Combinationen für die Quinionen - - - - - 286

5) Von den Combinationen für die mte Classe - - - - 286

Zwölf-

Seite

Zwölfter Abschnitt.

Von den Variationen - - - 289

1) Von den Variationen ohne Wiederholungen - - - - - 289

2) Von den Variationen mit Wiederholungen - - - - 291

Dreizehnter Abschnitt.

Von den Permutationen mit Wiederholungen 296

Zusatz zur nähern Erklärung derselben - 323

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung - - 301

Erster Abschnitt.

Von den Gleichungen überhaupt.

§. 1.

Die Algebra ist die Wissenschaft aus Aufgaben Gleichungen herzuleiten, und solche aufzulösen. Eine Gleichung entsteht, wenn der nehmliche Werth auf zweierlei Art ausgedrückt wird. Zum Beispiel, wenn man sagt: zweimal zwölf ist soviel als 30 weniger 6, so wird der nehmliche Werth von 24 auf zweierlei Art, nehmlich durch zweimal zwölf, und durch 30 weniger 6, ausgedrückt, folglich ist dieß eine Gleichung, die so bezeichnet wird,

$$2.\ 12 = 30 - 6$$

2. 12 heißt die eine Seite der Gleichung, und 30 − 6 die andere Seite.

Auf eben die Art, wenn vorkommt

$$3.\ 6 + 10 = 28$$

so ist 3. 6 + 10, das heißt, was links des Gleichheitszeichens steht, die eine Seite der Gleichung, und 28 die andere Seite.

§. 2. Wenn die Gleichung blos Zahlen enthält, wie die eben angesezten, so heißt sie eine

Zahlengleichung, enthält sie aber Buchstaben, eine **Buchstabengleichung**.

Z. B. $\frac{16}{8} + 7 - 1 = 2.4$ ist eine Zahlengleichung.
$ab + c = d$ ist eine Buchstabengleichung.

§. 3. Da in allen Aufgaben eine oder mehrere Zahlen gesucht werden, so werden die Gleichungen meistens eine oder mehrere unbekannte Größen enthalten, diese unbekannten Größen finden, heißt **die Gleichung auflößen**, oder **die unbekannte Größe entwickeln**.

§. 4. Damit man diese in der Gleichung vorkommenden unbekannten Größen, von den bekannten, es mögen solche aus Zahlen oder Buchstaben bestehen, immer unterscheiden kann, so werden sie mit den letzten Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet, nemlich mit x, y, z, oder wenn noch mehrere vorkommen, auch mit t, u, v, w.

§. 5. Es giebt Aufgaben, die nur eine einzige Art der Auflößung zulassen, oder bey denen die unbekannte Größe nur einen einzigen Werth hat. Z. B. wie viel beträgt die Summe von 6 und 12, hier ist nur die einzige Antwort 18 möglich. Eine solche Aufgabe heißt eine **bestimmte Aufgabe**.

§. 6. Es giebt aber auch solche Aufgaben, bei denen die unbekannte Größe mehrere Werthe hat, z. B. was für ganze Zahlen geben mit einander multiplizirt, das Produkt 360? Hier finden

den eine Menge Auflösungen statt, denn 180 und 2, ferner 90 und 4, so wie 45 und 8 und noch viele andere ganze Zahlen geben zum Product 360. Eine solche Aufgabe heißt eine **unbestimmte Aufgabe.**

§. 7. Wenn man folgende Gleichungen

$$3x + 5 = 8$$
$$5x^2 + 7 = 8 - x$$
$$9x^3 - 4 = 234$$

betrachtet, so sieht man, daß die unbekannte Grösse x, in ieder dieser drei Gleichungen eine Potenz von einem höhern Grade ist. Nemlich in der ersten Gleichung kommt x blos auf der ersten Potenz, in der zweiten Gleichung auf der zweiten Potenz, und in der dritten auf der dritten Potenz vor. Die erste Art der Gleichungen heißen **Gleichungen vom ersten Grad**, die zweite, **Gleichungen vom zweiten Grad**, die dritte, **Gleichungen vom dritten Grad** u. s. f.

Jede Gleichung von einem gewissen Grad erfordert eine eigene Art der Auflösung oder Reduction.

§. 8. Die Grundsätze aber, worauf die Reduction überhaupt beruht, sind folgende:

1) Gleiches zu gleichem addirt, giebt gleiches.

2) Gleiches vom gleichen subtrahirt, giebt gleiches.

3) Gleiches mit gleichem multiplicirt, giebt gleiches.

4) Gleiches mit gleichem dividirt, giebt gleiches.

Z. B. was für eine Zahl hat die Eigenschaft, daß wenn sie viermal genommen und von diesem vierfachen 10 subtrahirt wird, der Rest auch 10 beträgt?

Soll diese Aufgabe aufgelößt werden, so muß man zuerst genau bemerken, was gesucht wird. Diese gesuchte Zahl bezeichne man mit x. Nun gebe man auf die Bedingungen der Aufgabe acht, um daraus die Gleichung herleiten zu können. Nemlich das vierfache x wird durch 4x ausgedrückt, davon 10 subtrahirt giebt 4x — 10, und da dieser Rest gleichfalls 10 betragen soll, so hat man die Gleichung

$$4x - 10 = 10$$

Nun folgt die Reduction oder Auflösung dieser Gleichung. Das heißt, man muß so verfahren, daß x auf der einen Seite der Gleichung allein stehen bleibt, welches durch die im §. 8. angeführten Grundsätze bewirkt wird.

Nemlich da $4x - 10 = 10$ so addire man auf beiden Seiten 10

$$+ 10 + 10$$

so giebt dieß $4x = 20$, nun dividire man auf beiden Seiten mit 4,

so hat man $x = 5$.

Also

Also hat die Zahl 5 die verlangte Eigenschaft, daß wenn man sie mit 4 multiplicirt, und von diesem Product 10 subtrahirt, der Rest auch 10 ist.

§. 9. Kürzer kann man eine gegebene Gleichung auflösen, wenn man die Zahl, die auf der einen Seite mit — vorkommt, auf die andere Seite mit + setzt, oder umgekehrt, die Zahl, die auf der einen Seite mit + steht, auf die andere Seite mit — bringt.

Z. B. wenn $50 - 20 = 30$
so ist $50 = 30 + 20$

oder wenn $70 + 80 = 150$
so ist $70 = 150 - 80$

Ferner wenn $100 = 40 + 60$
so ist $100 - 60 = 40$

oder wenn $17 = 27 - 10$
so ist $17 + 10 = 27$

§. 10. Ferner wenn man, wofern eine Seite der Gleichung mit einer Zahl multiplicirt ist, die andere Seite mit dieser Zahl dividirt, und umgekehrt.

Z. B. wenn $12 . 3 = 36$
so ist $3 = \frac{36}{12}$

oder wenn $5x = 60$
so ist $x = \frac{60}{5}$
das heißt: $x = 12$

Ferner wenn $\frac{x}{7} = 63$
so ist $x = 7 . 63$
das heißt: $x = 441$

§. 11. Ferner wenn man, wofern nur ein Glied mit einer Zahl dividirt ist, die übrigen Glieder der Gleichung mit dieser Zahl multiplicirt.

Z. B. wenn $\frac{x}{3} - 60 = 81$
so ist $x - 180 = 243$

oder wenn $7x + \frac{x}{4} + 3 = 45$
so ist $28x + x + 12 = 180$

Denn da Gleiches mit Gleichem multiplicirt, Gleiches giebt, so ist klar, daß wenn man in der Gleichung $7x + \frac{x}{4} + 3 = 45$ alle Glieder mit 4 multiplicirt, wieder eine Gleichung entsteht. Multiplicirt man nun alle Glieder mit 4, so erhält man die Gleichung $28x + \frac{4x}{4} + 12 = 180$. Allein $\frac{4x}{4}$ ist soviel als x, so entsteht also die Gleichung $28x + x + 12 = 180$. Wenn man nun in der gegebenen Gleichung $7x + \frac{x}{4} + 3 = 45$, den Divisor 4 von dem Glied $\frac{x}{4}$ wegnimmt, und die übrigen Glieder der Gleichung damit multiplicirt, so erhält man gleichfalls

$$28x + x + 12 = 180.$$

§. 12. Endlich wenn man, wofern nur ein Glied mit einer Zahl multiplicirt ist, die übrigen Glieder der Gleichung mit dieser Zahl dividirt.

Z. B. wenn $5x + 10 = 80$
so ist $x + \frac{10}{5} = \frac{80}{5}$

Oder wenn $7x + 28 + 35 = 14x - 63$
so ist $x + \frac{28}{7} + \frac{35}{7} = \frac{14x}{7} - \frac{63}{7}$
d. i. $x + 4 + 5 = 2x - 9$

§. 13. Noch ist zu bemerken, daß wenn ein Ausdruck von dieser Form, $64 - (18 + 6)$ vorkommt, dieser in folgenden, $64 - 18 - 6$ verwandelt werden darf, wo die Parenthese weggelassen und -6 statt $+6$ gesetzt wird. Denn der Ausdruck $64 - (18 + 6)$ bedeutet, 18 und 6 sollen addirt, und ihre Summe von 64 subtrahirt werden, oder er ist so viel als $64 - 24$ d. i. 40. Der zweite Ausdruck $64 - 18 - 6$ bedeutet, von 64 soll zuerst 18 und dann ferner 6 subtrahirt werden, welches gleichfalls 40 zum Rest giebt.

§. 14. Eben so, wenn ein Ausdruck von dieser Form $70 - (21 - 7)$ vorkommt, so kann dieser mit weggelassener Parenthese in folgenden $70 - 21 + 7$ verwandelt werden. Denn nach dem ersten Ausdruck soll von 70 eigentlich 21 weniger 7 d. h. 14 subtrahirt werden, so ist der Rest 56. Nach dem zweiten soll aber 21 ganz von 70 subtrahirt werden, folglich ist es begreiflich, daß weil um 7 zuviel subtrahirt wird, die Zahl 7 addirt werden muß, um gleichfalls den Rest 56 zu bekommen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit einer einzigen unbekannten Größe.

Erste Aufgabe.

Es sollen 1524 fl. unter drei Personen so getheilt werden, daß der erste 150 fl. mehr als der zweite, und der zweite 270 fl. mehr bekommt als der dritte. Wieviel erhält ieder?

Auflösung.

Es ist leicht einzusehen, daß wenn man den Antheil des dritten wüßte, die beiden andern Theile sich sogleich bestimmen ließen. Dieser Antheil des dritten ist also die unbekannte Größe, und wird folglich mit x bezeichnet. Der Antheil des zweiten ist nun nach der Bedingung der Aufgabe $x + 270$, und der Antheil des ersten ist $x + 270 + 150$, oder $x + 420$. Da nun diese drei Theile zusammen 1524 fl. betragen, so addire man

den ersten Theil	$x + 420$
den zweiten Theil	$x + 270$
den dritten Theil	x
Ihre Summe	$3x + 690$ muß 1524 gleich seyn.

Folg-

Folglich hat man die Gleichung

$$3x + 690 = 1524$$

Nun löße man diese Gleichung auf, nach den im §. 9. und §. 10. gegebenen Regeln. Nemlich auf folgende Art:

$$\begin{array}{rll} & 3x + 690 & = 1524 \\ \text{also (§. 9.)} & 3x & = 1524 - 690 \\ \text{d. i.} & 3x & = 834 \\ \text{daher (§. 10.)} & x & = \frac{834}{3} \\ \text{d. i.} & x & = 278 \end{array}$$

Der dritte bekommt also 278 fl., folglich der zweite 278 + 270 oder 548 fl., und der erste 548 + 150 oder 698 fl.

Probe.

$$\begin{array}{r} 278 \\ 548 \\ 698 \\ \hline 1524 \end{array}$$

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Es hinterläßt jemand ein Vermögen von 6000 fl., das unter drei Erben so vertheilt werden soll, daß der erste 300 fl. mehr als der zweite, und dieser 450 fl. mehr als der dritte erhält. Wieviel bekommt jeder? Antwort. Der dritte 1600 fl., der zweite 2050 fl. und der erste 2350 fl.

2) Ein Vater hinterläßt seinen vier Kindern ein Vermögen von 20000 fl., und verordnet in seinem Testament, daß das dritte 1000 fl. mehr bekom-

bekommen soll als das vierte, das zweite 1000 fl. mehr als das dritte, und das erste 1000 fl. mehr als das zweite. Wieviel bekommt iedes? Antw. Das vierte 3500 fl. das dritte 4500 fl., das zweite 5500 fl. und das erste 6500 fl.

Zweite Aufgabe.

Es soll ein Vermögen von 12000 fl. unter vier Personen so vertheilt werden, daß der zweite 600 fl. weniger bekommt als der erste, der dritte 500 weniger als der zweite, und der vierte 400 fl. weniger als der dritte. Wieviel erhält ieder?

Auflösung.

Es ist leicht zu bemerken, daß wenn man den Antheil des ersten weiß, die andern Theile dadurch bestimmt werden. Man bezeichne also diesen Antheil des ersten mit x. Dann ist der Antheil des zweiten $x - 600$, der Antheil des dritten, $x - 600 - 500$ oder $x - 1100$ und der Antheil des vierten $x - 1100 - 400$ oder $x - 1500$. Da nun diese vier Theile zusammen das Vermögen ausmachen, so hat man die Gleichung

$$x + x - 600 + x - 1100 + x - 1500 = 12000$$

d.i. $4x - 3200 = 12000$

folglich (§. 9.) $4x = 12000 + 3200$

d. i. $4x = 15200$

also (§. 10.) $x = \frac{15200}{4}$

d. i. $x = 3800$

Also

Also bekommt der erste 3800 fl., folglich der zweite 3200 fl., der dritte 2700 fl. und der vierte 2300 fl.

Probe. 3800
3200
2700
2300
———
12000 fl.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

3) Jemand hinterläßt ein Vermögen von 8700 fl., und verordnet, daß solches unter drei Verwandte so getheilt werden soll, daß der zweite 900 fl. weniger erhält als der erste, und der dritte 1200 fl. weniger als der zweite. Wieviel bekommt ieder? Antwort. Der erste 3900 fl. der zweite 3000 fl., der dritte 1800 fl.

4) Es hinterläßt iemand ein Vermögen von 36000 fl. Davon werden 6000 fl. unter vier seiner Verwandten so vertheilt, daß der folgende immer 100 fl. weniger erhält, als der vorhergehende; das übrige wird unter seine fünf Kinder gleich vertheilt. Wieviel erhält iedes? Antwort. Der erste Verwandte 1650 fl., der zweite 1550 fl. der dritte 1450 fl., der vierte 1350 fl. und iedes Kind 6000 fl.

Dritte Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt vier Söhne und ein Vermögen von 24500 fl. Nach seinem Testament

soll

soll der erste dreimal soviel erhalten als der zweite, der zweite zweimal soviel als der dritte, und der dritte 800 fl. mehr als der vierte. Wieviel beträgt das Erbtheil eines ieden?

Auflösung.

Es sey das Erbtheil des vierten	x,
so bekommt der dritte	$x + 800$
der zweite	$2x + 1600$
der erste	$6x + 4800$
zusammen	$10x + 7200$

Da nun diese Summe dem Vermögen gleich ist, so hat man die Gleichung

$$10x + 7200 = 24500$$

also (§. 9.) $10x = 24500 - 7200$

d. i. $10x = 17300$

also (§. 10.) $x = \frac{17300}{10}$

d. i. $x = 1730$

Der vierte bekommt 1730 fl., also der dritte 1730 + 800 oder 2530 fl., der zweite 5060 fl. und der erste 15180 fl.

Probe.

1730
2530
5060
15180
———
24500 fl.

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

5) Jemand verordnet testamentlich, daß von vier Freunden, unter die sein Vermögen, das aus 4268 fl. besteht, vertheilt werden soll, A viermal so viel als B, dieser zweimal so viel als C, und dieser 200 fl. mehr als D erhalte. Wieviel beträgt das Erbtheil eines ieden? Antwort. Des D $172\frac{1}{3}$ fl., des C $372\frac{1}{3}$ fl., des B $744\frac{2}{3}$ fl. und des A $2978\frac{2}{3}$ fl.

6) Ein Vater hinterläßt fünf Söhne und ein Vermögen von 28750 fl. mit der Verordnung, daß der älteste zweimal so viel bekommen soll, als der iüngste, der zweite 2000 fl. mehr als der iüngste, der dritte 1200 fl. mehr als der vierte, und dieser 1000 fl. mehr als der iüngste. Wieviel erhält ieder? Antwort. Der fünfte 3925 fl., der vierte 4925 fl., der dritte 6125 fl., der zweite 5925 fl., und der erste 7850 fl.

Vierte Aufgabe.

In einem Testament ist verordnet, daß der erste Erbe die Hälfte des Vermögens, der zweite den vierten Theil des Vermögens und dazu 1000 fl. und der dritte den fünften Theil des Vermögens und dazu 2500 fl. erhalten soll, wie groß ist das Vermögen?

Auflösung.

Da hier das Vermögen die gesuchte Größe ist, so wird es mit x bezeichnet. Die Hälfte des Ver-

Vermögens wird also mit $\frac{1}{2}x$ bezeichnet. Der vierte Theil des Vermögens wird mit $\frac{1}{4}x$ bezeichnet. Der fünfte Theil des Vermögens mit $\frac{1}{5}x$.

Nun bekommt der erste Erbe $\frac{1}{2}x$
der zweite $\frac{1}{4}x + 1000$
und der dritte $\frac{1}{5}x + 2500$

Da aber diese Theile zusammen das Vermögen x ausmachen, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1000 + \frac{1}{5}x + 2500 = x$$

oder $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 3500 = x$

Weil aber $\frac{1}{2}x$ so viel ist, als x durch 2 dividirt, und $\frac{1}{4}x$ so viel als x durch 4 dividirt, so kann man diese Gleichung auch so schreiben

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3500 = x$$

Also nach §. 11. $\frac{4x}{2} + x + \frac{4x}{5} + 14000 = 4x$

d. i. $2x + x + \frac{4x}{5} + 14000 = 4x$

Ferner nach §. 11.

$$10x + 5x + 4x + 70000 = 20x$$

d. i. $19x + 70000 = 20x$

Endlich §. 9. $70000 = 20x - 19x$

d. i. $70000 = x$

Das Vermögen beträgt also 70000 fl. Wollte man auch berechnen, wieviel ieder Erbe bekommen soll, so kann dieß nun leicht geschehen. Denn der

der erste erhält $\frac{x}{2}$ oder 35000 fl., der zweite $\frac{x}{4}+1000$, d. i. $17500+1000$ oder 18500 fl., und der dritte $\frac{x}{5}+2500$, d. i. $14000+2500$, oder 16500 fl.

Probe.

Erbtheil des ersten	35000
des zweiten	18500
des dritten	16500
	70000

Aehnliche Exempel zur Uebung.

7) Ein Vermögen soll unter vier Erben so getheilt werden, daß der erste $\frac{1}{3}$ desselben und dazu 100 fl., der zweite $\frac{1}{4}$ desselben und dazu 200 fl., der dritte $\frac{1}{5}$ desselben und dazu 300 fl., und der vierte $\frac{1}{6}$ desselben und dazu 400 fl. erhält, wie groß ist das Vermögen? Antwort. Das Vermögen beträgt 20000 fl., und die Erbtheile sind folgende: des ersten $6766\frac{2}{3}$ fl., des zweiten 5200 fl., des dritten 4300 fl. und des vierten $3733\frac{1}{3}$ fl.

8) Es verordnete iemand in seinem Testament, daß die Wittwe die Hälfte seines Vermögens, der Bruder den dritten Theil desselben, und das Uebrige, das noch in 300 fl. bestund, die Kirche bekommen sollte. Wie groß war das Vermögen? Antwort 1800 fl.

Fünfte Aufgabe.

Es verordnet iemand testamentlich, daß sein Vermögeu so unter vier Erben vertheilt werden soll,

soll, daß der erste die Hälfte desselben weniger 1000 fl., der andere das Drittel desselben weniger 800 fl., der dritte das Viertel desselben weniger 600 fl., und der vierte das Achtel desselben erhalte. Wie groß ist das Vermögen?

Auflösung.

Das Vermögen sey $= x$, so bekommt der erste $\frac{1}{2}x - 1000$, der zweite $\frac{1}{3}x - 800$, der dritte $\frac{1}{4}x - 600$ und der vierte $\frac{1}{8}x$, folglich ist

$$\frac{x}{2} - 1000 + \frac{x}{3} - 800 + \frac{x}{4} - 600 + \frac{x}{8} = x$$

d. i. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - 2400 = x$

folglich §. 11.

$$\frac{8x}{2} + \frac{8x}{3} + \frac{8x}{4} + x - 19200 = 8x$$

d. i. $4x + \frac{8x}{3} + 2x + x - 19200 = 8x$

d. i. $7x + \frac{8x}{3} - 19200 = 8x$

daher §. 11. $21x + 8x - 57600 = 24x$

d. i. $29x - 57600 = 24x$

olglich §. 9. $29x = 24x + 57600$

also §. 9. $29x - 24x = 57600$

d. i. $5x = 57600$

u. endlich §. 10. $x = \frac{57600}{5}$

d. i. $x = 11520$

Das Vermögen beträgt also 11520 fl. und nun kann man auch die einzelnen Erbtheile leicht berech-

berechnen. Der erste erhält nemlich 5760 — 1000 oder 4760 fl., der zweite 3840 — 800 oder 3040 fl., der dritte 2880 — 600 oder 2280 fl., und der vierte 1440 fl.

Probe:

$$\begin{array}{r} 4760 \\ 3040 \\ 2280 \\ 1440 \\ \hline 11520 \text{ fl.} \end{array}$$

Aehnliche Exempel zur Uebung.

9) Ein gewisses Vermögen wird unter fünf Personen so getheilt, daß der erste ein Drittel weniger 500 fl., der zweite ein Viertel weniger 300 fl., der dritte ein Fünftel weniger 200 fl., der vierte ein Sechstel weniger 150 fl. und der fünfte ein Siebentheil weniger 125 fl. bekommt: Wie groß ist das Vermögen? Antwort. Es beträgt $13730\frac{10}{13}$ fl. Die Erbtheile sind folgende: Der erste erhält $4076\frac{12}{13}$ fl., der zweite $3132\frac{9}{13}$ fl., der dritte $2546\frac{2}{13}$ fl., der vierte $2138\frac{6}{13}$ fl. und der fünfte $1836\frac{7}{13}$ fl.

10) Ein Officier schickt folgenden Bericht ein. Der dritte Theil meines Commando's ist gefangen, der vierte Theil schwer blessirt, und der achte Theil ist geblieben, folglich habe ich nur noch sieben Mann. Wie groß war sein Commando? Antwort. Es bestund aus 24 Mann.

11) Jemand verlohr im Spiel, beym ersten Satz den dritten Theil seines mitgebrachten Geldes, und beim zweiten Satz den siebenten Theil seines mitgebrachten Geldes, so daß ihm iezt blos 22 Kreuzer übrig blieben. Wieviel Geld hatte er mitgebracht? Antwort. 42 Kreuzer.

12) Man verkauft von einem Stück Tuch die Hälfte und den fünften Theil des Stücks, und behält 15 Ellen übrig. Wieviel Ellen hielt das Stück? Antw. 50 Ellen.

13) Bei einer Gesellschaft besteht die Hälfte aus Künstlern, der dritte Theil aus Gelehrten, auch sind fünf Frauenzimmer dabei. Wie stark ist die Gesellschaft? Antw. 30 Personen.

14) Die Höhe des Postuments einer Säulenordnung beträgt $\frac{5}{26}$ von der Höhe derselben, die Höhe des Schaftgesimses $\frac{1}{26}$, der Untersatz hat $1\frac{1}{8}$ nürnb. Fuß Höhe, die Höhe des Schaftes beträgt $\frac{7}{13}$ der Säulenordnung, die Höhe des Capitäls $\frac{1}{26}$ derselben und die Höhe des Gebälkes $\frac{2}{13}$ derselben. Wie viele nürnberger Fuße ist diese Säulenordnung hoch? Antwort. $29\frac{1}{4}$ Fuß.

15) Die Hälfte meines iährlichen Einkommens, sagt iemand, verwende ich auf Kost, Hausmiethe und Holz, den sechsten Theil auf Kleidung, Wäsche und Bücher und den zehnten Theil auf Nebenausgaben, und erspare dabei iährlich 175 fl. Wie hoch beläuft sich sein iährliches Einkommen? Antwort. Auf 750 fl.

16) Die

16) Die größte ägyptische Pyramide ist um 30 pariser Fuß höher, als der Strasburger Münster, dieser um 8 Fuß höher als die Peterskirche zu Rom, diese um 3 Fuß höher als der Stephansthurm zu Wien, dessen Höhe der 30ste Theil von der Höhe des Großglockners, des höchsten Bergs in Deutschland ist, und die Summe der Höhen der gedachten Gebäude, beträgt nicht mehr als $\frac{117}{850}$ der Höhe dieses Bergs. Wie hoch ist iedes? Antw. Der Großglockner 12750, der Stephansthurn 425, die Peterskirche 428, der Münster 436 und die Pyramide 466 pariser Fuß.

Sechste Aufgabe.

An einem Bau arbeiteten täglich ein Meister, 4 Gesellen, 2 Lehrbursche und 3 Handlanger. Der Meister bekam täglich 1 fl., ein Geselle 48 Kr., ein Lehrbursche 30 Kr. und ein Handlanger 24 Kr. Der ganze Arbeitslohn betrug 134 fl. 24 Kr. Wie viele Tage dauerte der Bau?

Auflösung.

Die gesuchte Anzahl der Tage sey $= x$.

Der Meister bekam täglich 60 Kr., also in x Tagen 60x Kr.

Ein Geselle täglich 48 Kr. folglich 4 Gesellen täglich 192 Kr. also in x Tagen 192x Kr.

11) Jemand verlohr im Spiel, be
Satz den dritten Theil seines mitgebrac
des, und beim zweiten Satz den sieben
seines mitgebrachten Geldes, so daß ihm
22 Kreuzer übrig blieben. Wieviel Geld
mitgebracht? Antwort. 42 Kreuzer.

12) Man verkauft von einem Stü
die Hälfte und den fünften Theil des
und behält 15 Ellen übrig. Wieviel Elle
das Stück? Antw. 50 Ellen.

13) Bei einer Gesellschaft besteht die
aus Künstlern, der dritte Theil aus Ge
auch sind fünf Frauenzimmer dabei. W
ist die Gesellschaft? Antw. 30 Personen.

14) Die Höhe des Postuments ein
lenordnung beträgt $\frac{5}{26}$ von der Höhe d
die Höhe des Schaftgesimses $\frac{1}{26}$, der
hat $1\frac{1}{8}$ nürnb. Fuß Höhe, die Höhe de
tes beträgt $\frac{7}{13}$ der Säulenordnung, die
Capitäls $\frac{1}{26}$ derselben und die Höhe d
kes $\frac{2}{13}$ derselben. Wie viele nürnbe
ist diese Säulenordnung hoch? Antwor

15) Die Hälfte meines jährlic
mens, sagt iemand, verwende ich au
miethe und Holz, den sechsten Th
dung, Wäsche und Bücher und den
auf Nebenausgaben, und erspar
175 fl. Wie hoch beläuft sich s
kommen? Antwort. Auf 750

d erhielt ein
fl. und ieder
liefen sich in
fand sich die
4 Tage.

be.

nd, den sieben-
s auf das Thea-
rdentlichen Aus-
haltszulage von
n fünften Theil
ter wenden kön-
als iezt zur Be-
sgaben übrig blei-
t?

g.

x, so ist der siebente
x abgezogen, bleibt
tlichen Ausgaben. Be-
100 fl., so ist dann der
der fünfte Theil davon
sdann $x + 100 - \frac{x + 100}{5}$
Ausgaben. Dieser Rest ist
ngung der Aufgabe um 40 fl.
rige $\frac{6x}{7}$, werden also zu $\frac{6x}{7}$

 die

Ein Lehrbursche bekam täglich 30 Kr. folglich 2 Lehrbursche täglich 60 Kr., also in x Tagen 60x Kr.

Ein Handlanger täglich 24 Kr. folglich 3 Handlanger täglich 72 Kr., also in x Tagen 72x Kr.

Der ganze Arbeitslohn betrug 134 fl. 24 Kr. Dieser wird auf Kreuzer reducirt, weil der einzelne Lohn in Kreuzern ausgedrückt worden ist, und beträgt 8064 Kr.

Nun hat man die Gleichung

$$60x + 192x + 60x + 72x = 8064$$

d. i. $384x = 8064$

Also $x = \frac{8064}{384}$

d. i. $x = 21$

Der Bau dauerte also 21 Tage.

Probe.

	fl.	Kr.
Der Meister täglich 1 fl. also in 21 Tagen	21 :	—
4 Gesellen täglich 3 fl. 12 Kr. also in 21 T.	67 :	12
2 Lehrbursche täglich 1 fl. also in 21 T.	21 :	—
3 Handlanger täglich 1 fl. 12 Kr. also in 21 T.	25 :	12
Summe	134 :	24

Aehnliches Exempel zur Uebung.

17) In ein Ort wurde Executionsmannschaft gelegt, die aus 2 Officiren, 4 Corporalen, und

und 40 Gemeinen bestund. An Geld erhielt ein Officier täglich 2 fl., ein Corporal 1 fl. und ieder Gemeine 30 Kr. Diese Unkosten beliefen sich in allem auf 392 fl. Wie lange befand sich die Executionsmannschaft da? Antw. 14 Tage.

Siebente Aufgabe.

Ich verwende iezt, sagt iemand, den siebenten Theil meines iährlichen Gehalts auf das Theater, und das übrige auf meine ordentlichen Ausgaben. Könnte ich aber eine Gehaltszulage von 100 fl. erhalten, so würde ich den fünften Theil meines Gehaltes auf das Theater wenden können, und doch noch 40 fl. mehr als iezt zur Bestreitung meiner ordentlichen Ausgaben übrig bleiben. Wie groß ist sein Gehalt?

Auflösung.

Sein Gehalt sey $= x$, so ist der siebente Theil davon $\frac{x}{7}$, dieser von x abgezogen, bleibt der Rest $\frac{6x}{7}$ für die ordentlichen Ausgaben. Beträgt die Gehaltszulage 100 fl., so ist dann der Gehalt $x + 100$, und der fünfte Theil davon $\frac{x+100}{5}$, und es bleibt alsdann $x + 100 - \frac{x+100}{5}$ für die ordentlichen Ausgaben. Dieser Rest ist aber nach der Bedingung der Aufgabe um 40 fl. größer als der vorige $\frac{6x}{7}$, werden also zu $\frac{6x}{7}$

die 40 fl. addirt, so sind die beiden Reste gleich, und man hat folgende Gleichung:

$$\frac{6x}{7} + 40 = x + 100 - \frac{x+100}{5}$$

Folglich § 11.

$$6x + 280 = 7x + 700 - \frac{7x+700}{5}$$

ferner §. 11.

$$30x + 1400 = 35x + 3500 - (7x + 700)$$

also §. 13.

$$30x + 1400 = 35x + 3500 - 7x - 700$$

daher §. 9.

$$30x = 35x + 3500 - 7x - 700 - 1400$$

und §. 9.

$$30x + 7x = 35x + 3500 - 700 - 1400$$

ferner §. 9.

$$30x + 7x - 35x = 3500 - 700 - 1400$$

d. i.

$$37x - 35x = 3500 - 2100$$

oder

$$2x = 1400$$

und daher §. 10.

$$x = \frac{1400}{2}$$

d. i.

$$x = 700$$

Probe.

Da der jährliche Gehalt 700 fl. beträgt, so ist der 7te Theil davon 100 fl., und folglich werden

den 600 fl. auf die ordentlichen Ausgaben verwendet. Gesetzt nun, der Gehalt würde um 100 fl. vermehrt, so würde er 800 fl. betragen, wovon der fünfte Theil 160 fl. ist, und diesen subtrahirt, so würden für die ordentlichen Ausgaben 640 fl. übrig bleiben, also wirklich 40 fl. mehr, als bei dem iezigen Gehalt.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

18) Ein Liebhaber der Physik verwendete bis iezt iährlich den vierten Theil seines iährlichen Gehalts auf physikalische Instrumente und Bücher. Da er aber nun eine iährliche Zulage von 200 fl. erhält, so entschließt er sich ins künftige den dritten Theil seines Gehalts iährlich darauf zu verwenden, weil er berechnet, daß er, ohngeachtet dieses größern Aufwandes, dennoch eben so viel zur Bestreitung seiner andern Ausgaben übrig behalten werde. Wieviel betrug sein bisheriger iährlicher Gehalt? Antwort. 1600 fl.

19) Ein Capitalist, der ein iährliches Einkommen von 2500 fl. hat, verwendet den fünften Theil desselben iährlich auf die Kosten des Weins, von dem er ein Liebhaber ist. Durch einen Unglücksfall kommt er um einen Theil seines Vermögens, wodurch sein iährliches Einkommen so vermindert wird, daß er von nun an nur den zehnten Theil desselben für den Aufwand an Wein bestimmt. Demohngeachtet findet er, daß ihm zur Bestreitung seiner andern Ausgaben 160 fl. weniger übrig bleiben, als sonsten. Um wieviel

ist sein jährliches Einkommen vermindert werden? Antwort. Um $455\frac{5}{9}$ fl.

20) Eine Familie verwendete jährlich den zehnten Theil ihrer Einnahme auf den Caffee. Da nun solcher im Preise merklich stieg, so entschloß sie sich, weil ihr eben ein ansehnlicher Lotteriegewinn zu Theil geworden war, wodurch ihre jährliche Einnahme um 50 fl. gebessert wurde, von nun an, den sechsten Theil dieser iezigen jährlichen Einnahme auf die Kosten desselben zu verwenden, ob sie gleich 20 fl. weniger als sonst zur Bestreitung ihrer übrigen Ausgaben haben würde. Wie groß war die jährliche Einnahme vor dem Gewinn? Antw. 925 fl.

Achte Aufgabe.

Ein Bedienter erhält zum jährlichen Lohn 50 fl. und ein Kleid. Sein Herr giebt ihm nach vier Monaten den Abschied, und das Kleid statt des Lohns für diese Zeit. Wie theuer hat er das Kleid gerechnet?

Auflösung.

Der Werth des Kleides sey $= x$ fl.

Der Lohn beträgt jährlich $50 + x$

Nun verhält sich $\overset{\text{Monat.}}{12} : \overset{\text{Monat.}}{4} = (50+x) : \frac{200+4x}{12}$

Also beträgt der Lohn für 4 Monat $\frac{200+4x}{12}$

Dieser

Dieser ist dem Werth des Kleides gleich. Folglich ergiebt sich die Gleichung

$$x = \frac{200 + 4x}{12}$$

Daher $12x = 200 + 4x$

Ferner $12x - 4x = 200$

d. i. $8x = 200$

also $x = \frac{200}{8}$

oder $x = 25$

Probe. Denn $50 + 25 = 75$, und $12 : 4 = 72 : 25$.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

21) Ein anderer Bedienter erhält zum jährlichen Lohn 40 fl. und eine Kleidung. Nach fünf Monaten bekommt er seinen Abschied, und das Kleid statt des Lohns. Wie wurde die Kleidung gerechnet? Antw. Zu $28\frac{4}{7}$ fl.

Neunte Aufgabe.

Jeder Hauseigenthümer zu Wien mußte sonsten den siebenten Theil seines Miethzinses zur Zinssteuer beitragen, in der Folge den sechsten Theil. Um wieviel mußte er also in diesem lezteren Fall seinen Miethzins steigern, wenn er eben so viel als vormals übrig behalten wollte?

Auf-

ist sein jährliches Einkommen vermindert werden? Antwort. Um $455\frac{5}{9}$ fl.

20) Eine Familie verwendete jährlich den zehnten Theil ihrer Einnahme auf den Caffee. Da nun solcher im Preise merklich stieg, so entschloß sie sich, weil ihr eben ein ansehnlicher Lotteriegewinn zu Theil geworden war, wodurch ihre jährliche Einnahme um 50 fl. gebessert wurde, von nun an, den sechsten Theil dieser jezigen jährlichen Einnahme auf die Kosten desselben zu verwenden, ob sie gleich 20 fl. weniger als sonst zur Bestreitung ihrer übrigen Ausgaben haben würde. Wie groß war die jährliche Einnahme vor dem Gewinn? Antw. 925 fl.

Achte Aufgabe.

Ein Bedienter erhält zum jährlichen Lohn 50 fl. und ein Kleid. Sein Herr giebt ihm nach vier Monaten den Abschied, und das Kleid statt des Lohns für diese Zeit. Wie theuer hat er das Kleid gerechnet?

Auflösung.

Der Werth des Kleides sey $= x$ fl.

Der Lohn beträgt jährlich $50 + x$

Nun verhält sich $\overset{\text{Monat.}}{12} : \overset{\text{Monat.}}{4} = (50 + x) : \frac{200 + 4x}{12}$

Also beträgt der Lohn für 4 Monat $\frac{200 + 4x}{12}$

Dieser

Dieser ist dem Werth des Kleides gleich. Folglich ergiebt sich die Gleichung

$$x = \frac{200 + 4x}{12}$$

Daher $12x = 200 + 4x$

Ferner $12x - 4x = 200$

d. i. $8x = 200$

also $x = \frac{200}{8}$

oder $x = 25$

Probe. Denn $50+25=75$, und $12 : 4=72 : 25$.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

21) Ein anderer Bedienter erhält zum jährlichen Lohn 40 fl. und eine Kleidung. Nach fünf Monaten bekommt er seinen Abschied, und das Kleid statt des Lohns. Wie wurde die Kleidung gerechnet? Antw. Zu $28\frac{4}{7}$ fl.

Neunte Aufgabe.

Jeder Hauseigenthümer zu Wien mußte sonsten den siebenten Theil seines Miethzinses zur Zinssteuer beitragen, in der Folge den sechsten Theil. Um wieviel mußte er also in diesem leztern Fall seinen Miethzins steigern, wenn er eben so viel als vormals übrig behalten wollte?

Auf-

Auflösung.

Gesetzt der jährliche Miethzins habe a fl. betragen, so mußte der siebente Theil davon, d. h. $\frac{a}{7}$ abgegeben werden, folglich blieben dem Hauseigenthümer $a - \frac{a}{7}$ oder $\frac{6}{7}a$ Gulden. Nun sey das, um was er seinen Miethzins vergrößern soll $= x$, so ist also der Mithzins selbst $= a + x$ und der sechste Theil davon $\frac{a+x}{6}$, folglich bleibt dem Hauseigenthümer übrig $a + x - \frac{a+x}{6}$. Will er nun nichts verlieren, so muß $\frac{6}{7}a$ diesem Ausdruck gleich seyn. Dieß leitet auf die Gleichung

$$\frac{6a}{7} = a + x - \frac{a+x}{6}$$

Folglich $$6a = 7a + 7x - \frac{7a+7x}{6}$$

Also §. 11. $$36a = 42a + 42x - (7a + 7x)$$

Daher §. 13. $$36a = 42a + 42x - 7a - 7x$$

d. i. $$36a = 35a + 35x$$

Also §. 9. $$36a - 35a = 35x$$

d. i. $$a = 35x$$

und endlich §. 10. $$\frac{a}{35} = x$$

Der Hauseigenthümer muß also den Miethzins um $\frac{1}{35}$ steigern. Z. B. ein Haus trage jährlich

lich 350 fl. Zins, so betrug ehemals die Zinssteuer davon 50 fl. und er behielt 300 fl. übrig. In der Folge betrug sie davon $58\frac{1}{3}$ fl. und er behielt nur $291\frac{2}{3}$ fl. Wollte er nun wie vorhin 300 fl. behalten, so mußte er die 350 fl. Zins um $\frac{1}{35}$ d. h. um 10 fl. steigern, und sich 360 fl. bezahlen lassen, davon ist die Zinssteuer $\frac{1}{6}$ oder 60 fl., und es bleibt, wie vorhin, 300 fl. übrig.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

22) In einem gewissen Land mußte man bisher von dem Ertrag der Grundstücke 2 Gulden p.C. Steuer zahlen, da nun diese um einen Gulden erhöht wird, um wieviel wird ein Gutsbesitzer, der sein Gut verpachtet hat, das Pachtgeld steigern müssen, wenn er eben so viel als vorhin übrig behalten will? Antw. Um den sieben und neunzigsten Theil.

Zehnte Aufgabe.

Jemand kauft ein Stück Leinewand, 5 Ellen um 2 fl. 36 Kr. und verkauft solche, indem er 7 Ellen für 4 fl. 42 Kr. giebt, dabei gewinnt er 10 fl. 36 Kr. Wie viele Ellen hielt das Stück?

Auflösung.

Die gesuchte Anzahl Ellen sey $= x$. Nun berechne man erstens wie viel x Ellen beim Einkauf kosteten, und reducire dabei, der Bequemlichkeit

lichkeit der Rechnung wegen, die 2 fl. 36 Kr. auf lauter Kreutzer.

Ellen Ellen Kr. Kr.

Also $5 : x = 156 : \frac{156x}{5}$

Auf ähnliche Art berechne man, wie viel er für die x Ellen beim Verkauf erhielt, indem man auch dabei die 4 fl. 42 Kr. auf Kreutzer reducirt.

Ellen Ellen Kr. Kr.

$$7 : x = 282 : \frac{282x}{7}$$

Die Division, wird bey diesen beiden Proportionalsätzen nur angedeutet, indem man bei dem ersten das 5, und bei dem zweiten das 7 als Nenner oder Divisor unter das letzte Glied setzt, und nicht wirklich verrichtet, um die Bruchrechnung zu vermeiden.

Nun überlege man, daß 10 fl. 36 Kr. oder 636 Kr. genommen wurden, und dieser Gewinn sich ergiebt, wenn man den Einkaufspreis vom Verkaufspreis subtrahirt, so hat man folgende Gleichung:

$$\frac{282x}{7} - \frac{156x}{5} = 636$$

folglich $282x - \frac{1092x}{5} = 4452$

ferner $1410x - 1092x = 22260$

d. i. $318x = 22260$

also $x = \frac{22260}{318}$

d. i. $x = 70$

Probe.

Probe.

Ellen.		Ellen.		fl. Kr.		fl. Kr.	
5	:	70	=	(2 : 36)	:	36 : 24	als Einkaufspreis.
7	:	70	=	(4 : 42)	:	47 : —	als Verkaufspreis.
					Gewinn	10 : 36	

Aehnliche Exempel zur Uebung.

23) Jemand kauft ein Stück Tuch 3 Ellen um 22 fl., und verkauft es, indem er 4 Ellen um 30 fl. giebt. Bei diesem Handel gewinnt er 4 fl. Wie viele Ellen hielt das Stück? Antwort. 24 Ellen.

24) Es verhandelt iemand ein Stück Taffet, und giebt 3 Ellen für 4 fl. 15 Kr.; da ihm nun beim Einkauf 2 Ellen 2 fl. 55 Kr. gekostet hatten, so leidet er 1 fl. 15 Kr. Verlust. Wie viele Ellen hielt das Stück? Antw. 30 Ellen.

Eilfte Aufgabe.

Ein Kaufmann soll in 4 Terminen folgende Zahlungen leisten, 1500 fl. nach zwei Monaten, 2000 fl. nach vier Monaten, 2500 nach sechs Monaten, und 3500 nach 17 Monaten. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe auf einmal zu erhalten. Wann soll die Zahlung geschehen?

Auflösung.

Gesetzt, die Zahlung geschehe nach x Monaten, so müßen die Zinsen, welche die ganze Summe

me diese Zeit über trägt, denienigen Zinsen, welche die einzelnen Termingelder bis zu iedem Termin tragen würden, zusammen gleich seyn. Hierauf beruht die Art der Berechnung. Es sey nemlich das iährliche pro C. = k, so hat man folgende Proportionalsätze:

$100 : k = 1500 : \frac{1500k}{100}$ der iährl. Zins der 1500 fl.

Mt. Mt.

Ferner $12 : 2 = \frac{1500k}{100} : \frac{3000k}{1200}$ der zweimonatl. Zins d. 1500 fl.

Sodann $100 : k = 2000 : \frac{2000k}{100}$ der iährl. Zins der 2000 fl.

$12 : 4 = \frac{2000k}{100} : \frac{8000k}{1200}$ der 4 monatl. Zins d. 2000 fl.

Ferner $100 : k = 2500 : \frac{2500k}{100}$ der iährl. Zins der 2500 fl.

$12 : 6 = \frac{2500k}{100} : \frac{15000k}{1200}$ der 6 monatl. Zins d. 2500 fl.

Endlich $100 : k = 3500 : \frac{3500k}{100}$ der iährl. Zins der 3500 fl.

$12 : 17 = \frac{3500k}{100} : \frac{59500k}{1200}$ der 17 monatl. Zins d. 3500 fl.

Nun beträgt von den vier Termingeldern, 1500 fl., 2000 fl., 2500 fl. und 3500 fl. die Summe 9500 fl. Man formire also, um die x monatlichen Zinsen dieser 9500 fl. zu finden, folgende Proportionalsätze:

$100 : k = 9500 : \frac{9500k}{100}$ der iährliche Zins der 9500 fl.

$12 : x = \frac{9500k}{100} : \frac{9500kx}{1200}$ der Zins für x Monate dieser 9500 fl.

Nun

Nun muß, nach dem Vorhingesagten, die Summe der Zinsen der einzelnen Termingelder, dem Zins, welchen 9500 fl. in x Monaten eintragen, gleich seyn.

Folglich hat man die Gleichung:

$$\frac{9500kx}{1200} = \frac{3000k}{1200} + \frac{8000k}{1200} + \frac{15000k}{1200} + \frac{59500k}{1200}$$

d. i.

$$9500kx = 3000k + 8000k + 15000k + 59500k$$

also, indem man alle Glieder durch k dividirt:

$$9500x = 3000 + 8000 + 15000 + 59500$$

Ferner indem man alle Glieder mit 100 dividirt,

$$95x = 30 + 80 + 150 + 595$$

d. i. $95x = 855$

also $x = \frac{855}{95}$

d. i. $x = 9$

Probe.

Wenn man 5 pro Cent rechnet, so beträgt

der 2 monatliche Zins der 1500 fl.	. . .	$12\frac{1}{2}$ fl.
der 4 monatliche Zins der 2000 fl.	. . .	$33\frac{1}{3}$ fl.
der 6 monatliche Zins der 2500 fl.	. . .	$62\frac{1}{2}$ fl.
der 17 monatliche Zins der 3500 fl.	. . .	$247\frac{11}{12}$ fl.
	Zusammen	$356\frac{1}{4}$ fl.

Der 9 monatliche Zins der 9500 fl. beträgt aber auch so viel.

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

25) Ein Kaufmann soll folgende Zahlungen in drey Terminen leisten, 2832 fl. nach drei Monaten, 2560 fl. nach 9 Monaten, und 1450 fl. nach 16 Monaten. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe auf einmal zu erhalten. Nach wieviel Monaten muß die Zahlung geschehen? Antw. Nach 8 Monaten.

26) Ein Kapitalist soll 4000 fl. in fünf Terminen bezahlen, nemlich 600 fl. nach einen Monat, 700 fl. nach zwei Monaten, 800 fl. nach vier, 1000 fl. nach zehn, und den Rest nach zwölf Monaten. Er möchte aber die ganze Summe auf einmal entrichten, womit sein Gläubiger zufrieden ist. Nach wieviel Monaten muß die Zahlung geschehen? Antw. Nach $6\frac{1}{2}$ Monat.

Zwölfte Aufgabe.

Jemand hat in vier Terminen folgende Zahlungen zu leisten, 750 fl. nach drei Monaten, 1000 fl. nach fünf M., 2600 fl. nach sieben M. und den Rest der Hauptsumme nach $8\frac{2}{3}$ M. Sollte die ganze Summe auf einmal entrichtet werden, so müßte es nach sieben Monaten geschehen, Wieviel beträgt die ganze Summe?

Auflösung.

Es sey die ganze Summe $= y$. Folglich ist der Rest der Hauptsumme, der nach $8\frac{2}{3}$ M. zahl-

zahlbar ist $= y - 750 - 1000 - 2600$, d. i. $= y - 4350$.

Nun wird die Rechnung wie in der eilften Aufgabe geführt. Das jährliche p. C. sey nemlich $= k$, so ergeben sich folgende Proportionalsätze:

$100 : k = 750 : \frac{570k}{100}$ der jährl. Zins d. 750 fl.

$12 : 3 = \frac{750k}{100} : \frac{2250k}{1200}$ der 3 monatliche Zins der 750 fl.

ferner:

$100 : k = 1000k : \frac{1000k}{100}$ der jährl. Zins d. 1000 fl.

$12 : 5 = \frac{1000k}{100} : \frac{5000k}{1200}$ der 5 monatl. Z. d. 1000 fl.

ferner:

$100 : k = 2600 : \frac{2600k}{100}$ der jährl. Zins d. 2600 fl.

$12 : 7 = \frac{2600k}{100} : \frac{18200k}{1200}$ der 7 monatliche Zins der 2600 fl.

Endlich:

$100 : k = (y - 4350)k : \frac{(y-4350)k}{100}$

der jährliche Zins der $y - 4350$ fl.

$12 : 8\frac{2}{3} = \frac{(y-4350)k}{100} : \frac{8\frac{2}{3}(y-4350)k}{1200}$

der $8\frac{2}{3}$ monatliche Zins dieses Termingeldes.

Hierauf werden die 7 monatlichen Zinsen der Hauptsumme y berechnet.

$100 : k = y : \frac{ky}{100}$

$12 : 7 = \frac{ky}{100} ; \frac{7ky}{1200}$

Nun ist, nach der eilften Aufgabe:

$$\frac{7ky}{1200} = \frac{2250k}{1200} + \frac{5000k}{1200} + \frac{18200k}{1200} + \frac{8\frac{2}{3}(y-4350)k}{1200}$$

d. i. $7ky = 2250k + 5000k + 18200k + 8\frac{2}{3}(y - 4350)k$

oder $7y = 2250 + 5000 + 18200 + 8\frac{2}{3}(y - 4350)$

d. i. $7y = 2250 + 5000 + 18200 + 8\frac{2}{3}y - 37700$

daher $7y = 25450 + 8\frac{2}{3}y - 37700$

folglich $7y + 37700 = 25450 + 8\frac{2}{3}y$

ferner $7y + 37700 - 25450 = 8\frac{2}{3}y$

also $37700 - 25450 = 8\frac{2}{3}y - 7y$

d. i. $12250 = 1\frac{2}{3}y$

oder $36750 = 5y$

daher $7350 = y$

Probe.

Die 7350 fl. geben zu 5 p. C. in 7 Monaten $214\frac{3}{8}$ fl. Zins.

	fl.
Das erste Termingeld aber trägt zu 5 p.C.	$9\frac{3}{8}$ Zins.
Das zweite	$20\frac{5}{6}$
Das dritte	$75\frac{5}{6}$
Das vierte, das y – 4350 oder 3000 fl. beträgt	$108\frac{1}{3}$
Zusammen gleichfalls	$214\frac{3}{8}$

Aehnli-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

27) Jemand soll eine gewisse Summe in folgenden Terminen bezahlen, 1376 fl. nach 5 Monaten, 2560 fl. nach 8 Monaten, und den Rest nach 13 Monaten. Da nun die ganze Summe auf einmal soll entrichtet werden, so findet sich, daß dieß nach 10 Monaten geschehen muß. Wieviel betrug die ganze Summe? Antw. 7936 fl.

28) Es fiel iemanden eine Erbschaft zu, wodurch er die Verbindlichkeit übernahm, eine gewisse Summe davon einer andern Person Terminweise abzuzahlen, und zwar 200 fl. nach 1 Monat, 400 fl. nach 4 Monaten, 500 fl. nach 6, und den Rest nach 9 Monaten. Da nun diese Person das Geld auf einmal zu erhalten wünschte, so zahlte der Erbe ihr nach 5 Monaten die ganze Summe. Wie hoch belief sich solche? Antwort. Auf 1275 fl.

Dreizehnte Aufgabe.

Ein Handelsmann kauft verschiedene Waaren für 4500 fl., mit der Bedingung, daß die Zahlung erst nach Verlauf eines Jahrs geschieht. Da aber der Verkäufer baares Geld nöthig hat, so erbietet sich der Kaufmann ihm 1500 fl. baar zu bezahlen, und das übrige in gleichen Terminen, iedesmal mit 750 fl. abzutragen. Wie viel Monate beträgt der Zeitraum zwischen zwei auf einander folgenden Terminen?

Auflösung.

Da die 4500 fl. eigentlich erst nach einem Jahr zu bezahlen wären, so betragen die Zinsen davon, wenn man k pro C. rechnet, $\frac{4500k}{100}$, oder wenn man wirklich dividirt, 45 k.

Eben so viel muß nun auch die Summe der Zinsen der einzelnen Termingelder betragen, von dem Zeitpunkt des abgeschlossenen Kaufes an, bis zu dem Zeitpunkt, wo iedes ausgezahlt wird, gerechnet, wenn der Käufer keinen Schaden leiden soll.

Nun sey die Anzahl Monate des ersten Termins, von dem Zeitpunkt des abgeschlossenen Kaufes an gerechnet $= x$, so ist die Anzahl Monate des zweiten Termins von dem nehmlichen Zeitpunkt an gerechnet $= 2x$, die Anzahl Monate des dritten Termins eben so gerechnet $= 3x$, und die Anzahl Monate des vierten Termins $= 4x$. Dann wird der Zeitraum zwischen zwei auf einander folgenden Terminen gleichfalls $= x$ Monaten seyn.

Ferner finden folgende Proportionalsätze statt:

$100 : k = 750 : \frac{750k}{100}$ den Zinsen von 750 fl. in einem Jahr.

$12 : x = \frac{750k}{100} : \frac{750kx}{1200}$ den x monatlichen Zinsen der 750 fl.

Da also 750 fl. in x Monaten $\frac{750kx}{1200}$ Zinsen tragen, so tragen 750 fl. in 2x Monaten, doppelt

doppelt so viel, oder $\frac{1500kx}{1200}$ Zinsen, und in 3x Monaten, dreimal so viel, oder $\frac{2250kx}{1200}$ und in 4x Monaten $\frac{3000kx}{1200}$.

Soll nun der Schuldner keinen Schaden leiden, so müßen diese Zinse, die er einnimmt, zusammen so viel betragen, als der Zins 45 k, den das Kapital 4500 fl. während der 12 Monate würde getragen haben. Das ist:

$$\frac{750kx}{1200} + \frac{1500kx}{1200} + \frac{2250kx}{1200} + \frac{3000kx}{1200} = 45k$$

oder:

$$\frac{750x}{1200} + \frac{1500x}{1200} + \frac{2250x}{1200} + \frac{3000x}{1200} = 45$$

folglich:

$$\frac{750x + 1500x + 2250x + 3000x}{1200} = 45$$

also $\frac{7500x}{1200} = 45$

d. i. $\frac{75x}{12} = 45$

also $75x = 540$

daher $x = \frac{540}{75}$

d. i. $x = 7\frac{1}{5}$

Probe.

		fl.
750 fl. tragen Zins in	$7\frac{1}{5}$ Monat . .	$22\frac{1}{2}$
- - - - -	in $14\frac{2}{5}$ Monat . .	45
- - - - -	in $21\frac{3}{5}$ Monat . .	$67\frac{1}{2}$
- - - - -	in $28\frac{4}{5}$ Monat . .	90
	Summe der Zinsen	225

Aber 4500 fl. tragen in einem Jahr, zu 5 p. C. wie bei den Zinsen der Termingelder gerechnet, eben so viel an Zinsen.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

29) Jemand kauft eine Waare für 800 fl., welche aber erst nach 6 Monaten zu bezahlen sind. Nun zahlt der Käufer zwar 200 fl. baar, behält sich aber vor, die übrigen 600 fl. in zwei gleichen Terminen, iedesmal mit 300 fl. abzutragen. Wie groß muß der Zwischenraum zwischen den beiden Terminen angesetzt werden? Antw. Zu $5\frac{1}{3}$ M.

30) Es kauft iemand ein Landgut um 32000 fl. aber mit dem Vorbehalt, diese Summe erst nach einem Jahr zn entrichten. Nun macht gleich darauf der Verkäufer, welcher eben Geld braucht, ihm den Vorschlag 12000 fl. baar zu bezahlen, und das Uebrige in fünf gleichen Terminen und Termingeldern. Wie groß muß der Zwischenraum zwischen iedem Paar auf einander folgenden Terminen angesetzt werden? Antw. Zu $6\frac{2}{7}$ Monaten.

Vierzehnte Aufgabe.

Es soll iemand 2000 fl. nach $3\frac{1}{2}$ Monaten, 3500 fl. nach 4, und 1500 fl. nach 14 Monaten bezahlen. Sein Gläubiger macht ihm den Vorschlag, diese Summe von 7000 fl. in zwei Terminen, und zwar iedesmal die Hälfte zu bezahlen, doch dürfte der zweite Termin einen Monat länger

ger seyn, als der erste. Nach welcher Zeit muß der erste Termin angesetzt werden.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Anzahl Monate des ersten Termins $= x$, so ist die Dauer des zweiten $x + 1$ Monat, also verfließen von dem Zeitpunkt des gemachten Vergleichs an, bis zu dem, wo das zweite Termingeld bezahlt wird $2x + 1$ Monat.

Nun werden die Zinsen zu k p. C. berechnet. Nemlich

$100 : k = 2000 : \frac{2000k}{100}$ die Zinsen der 2000 fl. nach einem Jahr.

$12 : 3\frac{1}{2} = \frac{2000k}{100} : \frac{7000k}{1200}$ die $3\frac{1}{2}$ monatl. Zinsen der 2000 fl.

Eben so den 4 monatlichen Zins der 3500 fl. dieser beträgt $\frac{14000k}{1200}$

und den 14 monatlichen Zins der 1500 fl., dieser beträgt $\frac{21000k}{1200}$

Ferner berechnet man den x monatl. Zins von 3500 fl., dieser ist $\frac{3500kx}{1200}$

Endlich den $(2x + 1)$ monatlichen Zins von 3500 fl., dieser ist $\frac{3500k(2x+1)}{1200}$ oder

wenn man im Zähler die $(2x + 1)$ wirklich mit 3500 k multiplicirt, $\frac{7000kx + 3500k}{1200}$

So hat man folgende Gleichung:

$$\frac{3500kx}{1200} + \frac{7000kx + 3500k}{1200} = \frac{7000k}{1200} + \frac{14000k}{1200} + \frac{21000k}{1200}$$

d. i. $3500kx + 7000kx + 3500k = 7000k + 14000k + 21000k$

oder $3500x + 7000x + 3500 = 7000 + 14000 + 21000$

folgl. $10500x = 7000 + 14000 + 21000 - 3500$

also $10500x = 38500$

und $x = \frac{38500}{10500}$

d. i. $x = 3\frac{2}{3}$

Probe.

Man rechne fünf pro Cent, so tragen

2000 fl. nach $3\frac{1}{2}$ Monaten . . $29\frac{1}{6}$ fl.
3500 fl. nach 4 Monaten . . . $58\frac{1}{3}$ fl.
1500 fl. nach 14 Monaten . . $87\frac{1}{2}$ fl.
Zusammen 175 fl. Zins.

Nun tragen 3500 fl. in $3\frac{2}{3}$ Monaten $53\frac{17}{36}$ fl.
und 3500 fl. in $8\frac{1}{3}$ Monaten $121\frac{19}{36}$ fl.
Zusammen gleichfalls 175 fl. Zins.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

31) Es hat iemand 10000 fl. terminweise zu bezahlen, nemlich 1000 fl. nach einen Monat, 2000 fl.

2000 fl. nach vier Monaten, 3000 fl. nach sieben Monaten, und 4000 fl. nach 12 Monaten. Sein Gläubiger macht ihm den Vorschlag, diese Summe in zwei Terminen, iedesmal zur Hälfte zu bezahlen, und zwar so, daß der zweite Termin drei Monat länger sey, als der erste. Nach welcher Zeit ist der erste Termin anzusetzen? Antwort. Nach $4\frac{1}{7}$ Monaten.

32) Wenn bei dem vorigen Exempel der zweite Termin sechs Monate länger seyn dürfte, als der erste, nach welcher Zeit wäre dann der erste Termin anzusetzen? Antw. Nach $3\frac{1}{7}$ Monat.

Funfzehnte Aufgabe.

Wenn ein gewisses Kapital zu 4 pro Cent mit der Bedingung ausgeliehen ist, daß solches in dem Zeitraum eines Jahrs, in vierteliährigen Terminen und gleichen Termingeldern zurückbezahlt werde, und die Zinsen des auf diese Art heimgezahlten Kapitals 250 fl. betragen, wie groß war das Kapital?

Auflösung.

Das Kapital sey $= x$, so ist $\frac{x}{4}$ was davon am Ende iedes Termins abgezahlt wurde.

Ferner ist $\frac{4x}{100}$ der iährliche Zins von x, und $\frac{4x}{400}$ der vierteliährige Zins von x.

Zu

Zu Anfang des zweiten Termins, wird von x ein Viertel heimgezahlt, also ist der Rest $x - \frac{x}{4}$ d. i. $\frac{3x}{4}$, davon ist der vierteljährige Zins $\frac{3x}{400}$.

Beim Anfang des dritten Termins ist der Rest $\frac{x}{2}$, davon der vierteljährige Zins $\frac{2x}{400}$.

Endlich zu Anfang des vierten Termins ist vom Kapital noch $\frac{x}{4}$ übrig, davon ist der vierteljährige Zins $\frac{x}{400}$.

Diese vierteljährigen vier Zinse betragen, nach der Bedingung der Aufgabe 250 fl. Also ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{4x}{400} + \frac{3x}{400} + \frac{2x}{400} + \frac{x}{400} = 250$$

oder $$\frac{4x + 3x + 2x + x}{400} = 250$$

folglich $$\frac{10x}{400} = 250$$

also $$10x = 100000$$

daher $$x = 10000$$

Probe.

	fl.
Der vierteljährige Zins von 10000 fl. zu 4 p. C. beträgt	100
Der vierteljährige Zins von 7500 fl. zu 4 p. C. beträgt	75
Der vierteljährige Zins von 5000 fl. zu 4 p. C. beträgt	50
Der vierteljährige Zins von 2500 fl. zu 4 p. C. beträgt	25
Zusammen	250

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

33) Wenn ein gewisses Kapital zu 5 p. C. mit der Bedingung ausgeliehen ist, daß solches in dem Zeitraum von drei Jahren, in sechs halbiährigen Terminen und gleichen Termingeldern zurückgezahlt werde, und die Zinsen sich zusammen auf 21000 fl. belaufen, wie groß ist das Kapital? Antw. 240000 fl.

34) Jemand nimmt ein Kapital zu $5\frac{1}{2}$ p. C. auf, und verspricht solches innerhalb zwei Jahren in acht gleichen Termingeldern wieder zu bezahlen, die Termine aber sollten in dem ersten Jahr halbiährig, in dem zweiten aber von zwei zu zwei Monaten bestimmt seyn. Da nun das Kapital auf diese Art abgetragen wurde, so fand man, daß es $514\frac{1}{4}$ fl. Zinsen trug. Wie groß war es? Antw. 6800 fl.

Sechzehnte Aufgabe.

Es ist iemand 1664 fl. nach sieben Monaten zu zahlen schuldig. Er will sogleich baar soviel zahlen, daß ihm der Rest noch neun Monate gelassen werde. Wieviel beträgt die baare Zahlung?

Auflösung.

Es sey die baare Zahlung $= x$, das Procent $= k$, so ist $\frac{7.1664k}{1200}$ oder $\frac{11648k}{1200}$ der siebenmonatliche Zins der 1664 fl.

Nun

Nun berechne man den 9 monatlichen Zins von 1664 — x. Dieser ist $\frac{9.(1664-x)k}{1200}$ oder $\frac{(14976-9x)k}{1200}$ oder $\frac{14976k-9kx}{1200}$

Die beiden Zinse $\frac{11648k}{1200}$ und $\frac{14976k-9kx}{1200}$ müssen nun einander gleich gesetzt werden. Denn der Schuldner würde, den Vertrag gemäß, von 1664 fl. die 7 monatlichen Zinsen haben ziehen können; zahlt er aber sogleich x fl. baar, so kann er nur den zweiten Zins ziehen. Soll er nun keinen Schaden haben, so müssen diese Zinse gleich seyn. Folglich hat man die Gleichung:

$$\frac{11648k}{1200} = \frac{14976k-9kx}{1200}$$

d. i. $11648k = 14976k - 9kx$

oder $11648 = 14976 - 9x$

also $9x + 11648 = 14976$

folglich $9x = 14976 - 11648$

oder $9x = 3328$

u. endlich $x = 369\frac{7}{9}$

Probe.

Der 7 monatl. Zins zu 5 p. C. von 1664 fl. beträgt $48\frac{8}{17}$ fl.

Nun ist $1664 - 369\frac{7}{9} = 1294\frac{2}{9}$.

Von diesen $1294\frac{2}{9}$ fl. beträgt der 9 monatl. Zins gleichfalls $48\frac{8}{17}$ fl.

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

35) Wenn iemand 2000 fl. nach fünf Monaten zu bezahlen hat, wieviel muß er sogleich baar zahlen, wenn er haben will, daß ihm der Rest ein Jahr lang gelassen werde? Antw. $1166\frac{2}{3}$ fl.

36) Ein anderer ist 850 fl. nach drei Monaten zu bezahlen schuldig, wieviel hat er baar zu zahlen, damit ihm der Rest sieben Monate gelassen werden kann? Antw. $485\frac{5}{7}$ fl.

Siebzehnte Aufgabe.

Wenn iemand baar 340 fl. zahlt, damit ihm der Rest eines gewissen Kapitals sechs Monate lang gelassen werde, da er das Kapital selbst nach zwei Monaten hätte bezahlen sollen, wie groß ist das Kapital?

Auflösung.

Das Kapital sey $= y$, das Procent $= k$, so tragen y fl. nach zwei Monaten $\frac{2ky}{1200}$ fl. Zinsen. Zahlt er nun 340 fl. baar, so ist der Rest des Kapitals $y - 340$, davon betragen die 6 monatlichen Zinsen $\frac{6(y-340)k}{1200}$ oder $\frac{(6y-2040)k}{1200}$ d. i. $\frac{6ky - 2040k}{1200}$.

Also hat man, zufolge dessen, was in der Auflösung der vorigen Aufgabe erinnert wurde, die Gleichung:

$$\frac{2ky}{1200} = \frac{6ky - 2040k}{1200}$$

oder

oder $2ky = 6ky - 2040k$
folglich $2y = 6y - 2040$
also $2y + 2040 = 6y$
daher $2040 = 6y - 2y$
d. i. $2040 = 4y$
endlich $510 = y$

Probe.

Zu 5 p. C. sind die 2 monatlichen Zinsen von 510 fl. $4\frac{1}{4}$ fl. und von $510 - 340$ oder von 170 fl. die 6 monatl. Zinsen gleichfalls $4\frac{1}{4}$ fl.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

37) Ein Kaufmann hat für die erhaltenen Waaren eine gewisse Summe nach fünf Monaten zu zahlen, nun entrichtet er 210 fl. baar, und den Rest nach acht Monaten. Wie hoch belief sich die Summe? Antw. Auf 560 fl.

38) Jemand hat ein Kapital nach drei Jahren zu bezahlen, er entrichtet 1000 fl. baar, und den Rest nach $3\frac{1}{2}$ Jahren. Wie hoch belief sich das Kapital? Antw. Auf 7000 fl.

Achtzehnte Aufgabe.

Es hat iemand 1000 fl. baar zu zahlen. Er macht seinem Gläubiger den Vorschlag, sie innerhalb fünf Jahren in fünf gleichen Terminen und Termingeldern mit fünf Procent Zinsen zu ent-

entrichten. Wie hoch beläuft sich iedes Termingeld?

Auflösung.

Da die iährlichen Zinsen von 1000 fl. zu 5 p. C. innerhalb 5 Jahren 250 fl. betragen, so wird es als einerlei angesehen, ob der Gläubiger iezt 1000 fl. oder am Ende des fünften Jahrs 1250 fl. erhält. Nun muß die Rechnung so geführt werden, daß wenn man die einzelnen gleichen Termingelder, nebst den Zinsen, die sie dem Gläubiger, von der Zeit an, da er iedes erhält, bis zu dem Ende des 5ten Jahrs tragen, addirt, die Summe 1250 fl. beträgt.

Es sey nun das Termingeld $= x$, so ist der iährliche Zins davon $\frac{5x}{100}$, der zweiiährige $\frac{10x}{100}$, der dreiiährige $\frac{15x}{100}$ und der vieriährige $\frac{20x}{100}$, Die 5 Termingelder, oder $5x$, die der Gläubiger erhält, müssen nun, nebst den eben berechneten 4 Zinsen, (denn das lezte trägt keinen Zins), 1250 fl. ausmachen. Also hat man folgende Gleichung:

$$5x + \frac{20x}{100} + \frac{15x}{100} + \frac{10x}{100} + \frac{5x}{100} = 1250$$

also $500x + 20x + 15x + 10x + 5x = 125000$

d. i. $550x = 125000$

oder $55x = 12500$

folglich $x = 227\frac{3}{11}$

Probe.

Wird in iedem Termin $227\frac{3}{11}$ fl. bezahlt, so macht die Summe für fünf Termine $1136\frac{4}{11}$ fl. Da nun der Gläubiger das erste Termingeld vier

Jahre

Jahre benutzen kann, so trägt dieß ihm $45\frac{5}{11}$ fl. Zins, das zweite für drei Jahre $34\frac{1}{11}$ fl. Zins, das dritte für zwei Jahre $22\frac{8}{11}$ und das vierte ein Jahr lang $11\frac{4}{11}$ fl. Zins

	fl.
Also zusammen	$11\frac{4}{11}$
	$22\frac{8}{11}$
	$34\frac{1}{11}$
	$45\frac{5}{11}$
	$113\frac{7}{11}$
Dazu	$1136\frac{4}{11}$
Summe	1250 fl.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

39) Es hat iemand nach Verlauf eines Jahrs 1800 fl. zu bezahlen, er will sie aber in vier vierteliährigen Terminen und gleichen Termingeldern abtragen, wie hoch beläuft sich iedes Termingeld zu 5 p. C. gerechnet? Antwort. Auf $441\frac{117}{163}$ fl.

Neunzehnte Aufgabe.

Bei dem Verkaufe eines Gartens melden sich zwei Kauflustige. Der erste bietet 7705 fl. und zwar 3365 fl. baar, und 4340 fl. nach 8 Jahren, oder wenn der Verkäufer es verlangen sollte, diese auch baar mit 5 Procent Rabat. Der zweite bietet eine andere Summe, die in drei zweijährigen Terminen und gleichen Termingeldern abgetragen,

oder

oder auch baar bezahlt werden soll, aber im letztern Fall mit 5 Procent Rabat. Der Verkäufer versichert iemanden, daß beide Gebote gleich sind. Wieviel hat der Zweite gebotten?

Auflösung.

Die 4340 fl. die der erste Käufer nach acht Jahren bezahlen will, sind gegenwärtig 3100 fl. werth. Dieß wird so berechnet. Für ein Jahr 5 Procent Rabat angenommen, so beträgt dieß in acht Jahren 40 Procent Rabat. Nun formire man folgenden Proportionalsatz:

$$140 : 100 = 4340 : 3100$$

d. h. Es ist als einerlei anzusehen, ob 4340 fl. in acht Jahren, oder 3100 fl. baar bezahlt werden. Nun bietet der erste Käufer noch 3365 fl. baar, folglich zusammen 6465 fl. baar. Es sey das Gebot des zweiten $= x$, so ist der dritte Theil davon $\frac{x}{3}$. Man reducire nun gleichfalls die drei Termingelder auf den ietzigen Werth, indem man 5 Procent Rabat rechnet. Nemlich auf diese Art

$110 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{100x}{330}$ der reducirte Werth des ersten Termingeldes.

$120 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{100x}{360}$ der reducirte Werth des zweiten Termingelds.

$130 : 100 = \frac{x}{3} : \frac{100x}{390}$ der reducirte Werth des dritten Termingelds.

Nun ist nach der Versicherung des Verkäufers

$$\frac{100x}{330} + \frac{100x}{360} + \frac{100x}{390} = 6465$$

d. i. $\frac{10x}{33} + \frac{10x}{36} + \frac{10x}{39} = 6465$

folglich $\frac{10x}{11} + \frac{10x}{12} + \frac{10x}{13} = 19395$

oder $\frac{10x}{11} + \frac{5x}{6} + \frac{10x}{13} = 19395$

also $10x + \frac{55x}{6} + \frac{110x}{13} = 213345$

und $60x + 55x + \frac{660x}{13} = 1280070.$

so wie $780x + 715x + 660x = 16640910$

oder $2155x = 16640910$

daher $x = 7722$

Probe.

Denn wenn der zweite Käufer 7722 fl. in drei gleichen Terminen und Termingeldern gebotten hat, so kommen auf einen Termin 2574 fl. Der auf den Zeitpunkt der Licitation reducirte Werth des ersten Termingelds zu 5 Procent Rabat gerechnet, ist 2340 fl., des zweiten Termingelds 2145 fl. und des dritten 1980 fl. Dieß zusammen addirt giebt 6465 fl. baar. Eben so viel aber hat auch der erste baar gebotten.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

40) Zwei bieten auf ein Landgut, der eine 10000 fl., davon 5380 fl. baar, und das Uebrige in zwei gleichen iährigen Terminen und Termingeldern, oder diesen Rest auch baar, aber mit

5 Pro-

5 Procent Rabat. Der zweite bietet eine andere Summe, davon er 4720 fl. baar bezahlen, das übrige aber in zwei halbjährigen Terminen und gleichen Termingeldern, oder auch mit 5 Procent Rabat sogleich baar bezahlen will. Der Verkäufer findet, daß das erste Gebot um 810 fl. besser ist, als dieses. Wieviel hat der zweite Käufer gebotten? Antwort. 9025 fl.

Zwanzigste Aufgabe.

Ein Körper bewegt sich so fort, daß er in einer Minute 40 Fuß zurücklegt. Nachdem er fünf Minuten lang in Bewegung ist, folgt ihm ein anderer Körper, von dem Punkt aus, von welchem der erste ausgieng, der in einer Minute 52 Fuß zurücklegt. Wie lange braucht er, bis er den ersten Körper einholt?

Auflösung.

Die Anzahl Minuten, die der zweite Körper braucht, bis er den ersten einholt, sey = x. Nun bewegt sich der erste Körper in einer Minute durch 40 Fuß, also in fünf Minuten 200 Fuß, und in x Minuten durch 40x Fuß.

Der zweite Körper aber bewegt sich in x Minuten durch 52x Fuß.

Der ganze Weg, den der erste Körper zurück legt, ist 200 Fuß + 40x Fuß.

Der ganze Weg, den der zweite Körper zurück legt, ist 52x Fuß.

Es muß aber der ganze Weg des zweiten Körpers dem ganzen Weg des ersten gleich seyn, sonst könnte er ihn nicht eingeholt haben.

Folglich hat man die Gleichung:

$$52x = 200 + 40x$$

also $52x - 40x = 200$

d. i. $12x = 200$

daher $x = 16\frac{2}{3}$

Probe.

Da der zweite Körper den ersten in $16\frac{2}{3}$ Minuten einholt, und in 1 M. 52 Fuß zurück legt, so beträgt sein ganzer Weg $16\frac{2}{3}$mal 52 oder $866\frac{2}{3}$ Fuß.

Der erste Körper aber legte 200 Fuß zurück ehe der zweite anfieng sich zu bewegen, und dann noch $16\frac{2}{3}$ mal 40 oder $666\frac{2}{3}$ Fuß, also in allem $866\frac{2}{3}$ Fuß, das heißt, eben soviel als der zweite.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

41) Einem Boten, der schon vor sechs Tagen von einem gewissen Ort abgegangen ist, wird ein anderer aus eben dem Ort und auf dem nehmlichen Weg nachgeschickt, um ihn einzuholen. Wenn nun der erste Bote täglich 4 Meilen, und der zweite täglich sechs Meilen zurück legt, in wie viel Tagen, wird der zweite den ersten einholen? Antw. In 12 Tagen.

42) Aus einem gewissen Ort wird ein Courier abgeschickt, der alle 5 Stunden 8 Meilen macht,

macht, nun wird 6 Stunden nach seiner Abreise ein anderer nachgeschickt, der alle 7 Stunden 12 Meilen zurück legt. Nach wieviel Stunden holt er den ersten ein? Antw. Nach 84 Stunden.

43) Aus dem Orte A der von dem Orte B 14 Meilen entfernt ist, marschirt ein Regiment geraden Weges nach dem Orte B, und macht täglich 3 Meilen. Aus dem Orte B marschirt ein anderes Regiment geraden Weges nach dem Ort A, und macht täglich 4 Meilen. Wann werden beide Regimenter zusammentreffen? Antw. Nach 2 Tagen.

44) Einem Courier der aus dem Orte A abreiset und alle 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meilen macht, wird 24 Stunden darauf ein anderer aus dem Orte B, welches 7 Meilen weit von dem Orte A rückwärts liegt, nachgeschickt, der iede Stunde $\frac{7}{8}$ Meilen macht. Wann wird er den ersten einholen? Antw. Nach 27 Tagen.

45) Ein gewisser Ort A ist von einem andern B 20 Meilen entfernt. Aus dem erstern marschirt ein Regiment gerade auf B zu, welches täglich 4 Meilen macht. Drei Tage darauf marschirt aus dem Ort B ein anderes Regiment gerade auf A zu, das täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen macht. Den wievielsten Tag nach dem Ausmarsch des ersten treffen die beiden Regimenter zusammen? Antwort. Nach $3\frac{16}{17}$ Tagen.

46) Um zwölf Uhr deckt, wie bekannt ist, der Minutenzeiger einer Uhr den Stundenzeiger.

Es ist die Frage, zu welcher Zeit er ihn wieder einholt? (Man stelle sich dabei vor, der Stundenzeiger sey bis ein Uhr gerückt, so steht der Minutenzeiger wieder auf 12. Der Raum zwischen beiden enthält fünf Abtheilungen, deren der Umfang 60 hat. Nun überlege man, daß in einer Stunde der Stundenzeiger fünf Abtheilungen, der Minutenzeiger aber 60 durchläuft, so ergiebt sich die Gleichung, aus welcher man die Zeit findet, die der auf 12 Uhr befindliche Minutenzeiger braucht, um den auf 1 Uhr befindlichen Stundenzeiger einzuholen. Dazu addire man eine Stunde) Antw. Nach $1\frac{1}{11}$ Stunde, oder nach einer Stunde und $5\frac{5}{11}$ Minuten nach ein Uhr.

47) Es ist ferner die Frage, zu welcher Zeit der Minutenzeiger den Stundenzeiger zum zweitenmal einholt? Antw. $10\frac{10}{11}$ Minuten nach zwei Uhr.

Ein und zwanzigste Aufgabe.

Ein Körper bewegt sich so, daß er in einer Minute 20 Fuß zurück legt, nachdem er vier Minuten in Bewegung ist, folgt ihm ein anderer auf dem nehmlichen Weg, der ihn in 16 Minuten einholt. Wieviele Fuß legt dieser zweite Körper in einer Minute zurück?

Auflösung.

Der erste Körper legt in einer Minute 20 Fuß zurück, also 80 Fuß in vier Minuten, und

320

320 Fuß in den folgenden 16 Minuten, folglich in allem 400 Fuß. Nun sey der Raum, durch den sich der zweite Körper in einer Minute bewegt = y Fuß, so durchläuft er in 16 Minuten 16 y Fuß, und da er alsdann den ersten einholt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$16y = 400$$

also $$y = 25$$

Probe.

Wenn der zweite Körper in einer Minute 25 Fuß zurück legt, so legt er in 16 Minuten 400 Fuß zurück, nehmlich soviel als der erste, also hat er ihn nach 16 Minuten eingeholt.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

48) Ein Courier macht täglich 12 Meilen, nach zwei Tagen wird ihm ein anderer nachgeschickt, der ihn in vier Tagen einholen solle. Wieviele Meilen muß dieser täglich machen? Antwort. 18 Meilen.

49) Ein Courier macht täglich 11 Meilen, am folgenden Tag nach seiner Abreise wird ihm ein anderer nachgeschickt der ihn einholen soll, ehe er 60 Meilen zurück gelegt hat. Wie viele Meilen muß dieser täglich machen? (Hier ist folgendes zu bemerken. Da der erste Courier zu 11 Meilen einen Tag braucht, so braucht er zu 60 Meilen $5\frac{5}{11}$ Tage. Es fängt aber der zweite einen Tag später zu gehen an, folglich muß dieser

die 60 Meilen in $4\frac{5}{11}$ Tag zurücklegen. Nun wird die Rechnung wie bei Nro. 48. geführt.) Antw. $13\frac{23}{49}$.

50) Ein feindliches Corps ist vor zwei Tagen von einem gewissen Orte aufgebrochen, und macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen. Man will solchem von dem nehmlichen Orte aus nachsetzen, und es in sechs Tagen einholen. Wieviele Meilen müßen täglich gemacht werden? Antwort. 6 Meilen.

Zwei und zwanzigste Aufgabe.

Eine Masse, die 100 ℔. schwer ist, besteht aus Schwefel und Salpeter, so daß auf sieben Theile Salpeter drei Theile Schwefel kommen. Wieviele ℔ Salpeter müssen der Masse noch zugesetzt werden, wenn auf eilf Theile Salpeter vier Theile Schwefel kommen sollen?

Auflösung.

Die gesuchte Anzahl ℔ Salpeter seyen $= x$. Nun berechne man zuerst vermittelst der Gesellschaftsrechnung, wie viele ℔ Salpeter und Schwefel in der Masse sind, nemlich 70 ℔ Salpeter und 30 ℔ Schwefel.

Hierauf formire man folgenden Proportionalsatz $4 : 11 = 30 : 82\frac{1}{2}$

so hat man die Gleichung $82\frac{1}{2} = 70 + x$

folglich $82\frac{1}{2} - 70 = x$

d. i. $12\frac{1}{2} = x$

Probe.

Probe.

Es verhält sich nemlich $70 + x : 30 = 11 : 4$.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

51a) Wieviel Schwefel muß der in der Aufgabe erwähnten Masse entzogen werden, wenn gleichfalls 4 Theile Schwefel auf 11 Theile Salpeter kommen sollen? Antw. $4\frac{6}{11}$ ℔.

51b) Wenn nun aber eben dieser Masse so viel Salpeter zugesetzt werden soll, als ihr Schwefel entzogen wird, damit das Gewicht der Masse, welches 100 ℔ beträgt, ungeändert bleibe, und sich die Menge des Schwefels zu der des Salpeters dennoch verhalte wie $4 : 11$, so ist die Frage, wieviel Salpeter muß der Masse zugesetzt, und ihr dafür an Schwefel entzogen werden? (Wenn nemlich die gleiche Quantität des zugesetzten Salpeters und des entzogenen Schwefels mit x bezeichnet wird, so verhält sich $4 : 11 = 30 - x : 70 + x$, folglich ist $\frac{11(30-x)}{4} = 70 + x$, aus welcher Gleichung man x finden kann.) Antw. $3\frac{1}{3}$ ℔.

Drei und zwanzigste Aufgabe.

Ein Kaufmann braucht zur Erhaltung seines Hauswesens iährlich 2000 fl. Wenn er diese mit dem Anfang eines ieden Jahrs von seinem Vermögen wegnimmt, so gewinnt er iährlich soviel als der dritte Theil des übrigen Vermögens beträgt. Nach drei Jahren findet er, daß sein Vermögen

mögen das Doppelte seines anfänglichen Capitals beträgt. Wie groß war dieses Capital, womit er drei Jahre zuvor zu handeln anfieng.

Auflösung.

Es sey dieses anfängliche Capital $= x$ Gulden. Nimmt er 2000 fl. davon, so behält er $x - 2000$, dieses vermehrt sich um den dritten Theil, also ist $x - 2000 + \frac{x - 2000}{3}$ sein Vermögen am Ende des ersten Jahrs. Will man nun bequem weiter rechnen, so muß dieser Ausdruck einfacher gemacht werden. Dieß geschieht, wenn man alles in ihm auf einerlei Benennung bringt, und was sich addiren läßt wirklich addirt. Es ist nemlich $x - 2000 + \frac{x - 2000}{3}$ soviel als $\frac{3x - 6000}{3} + \frac{x - 2000}{3}$, und dieß ist soviel als $\frac{4x - 8000}{3}$.

Nun nimmt der Kaufmann am Anfang des zweiten Jahrs 2000 fl. davon, also hat er noch $\frac{4x - 8000}{3} - 2000$, welcher Ausdruck, wenn er wie der vorige einfacher gemacht wird, giebt $\frac{4x - 8000}{3} - \frac{6000}{3}$ oder $\frac{4x - 14000}{3}$. Davon ist der dritte Theil $\frac{4x - 14000}{9}$ also ist das Vermögen am Ende des zweiten Jahrs $\frac{4x - 14000}{3} + \frac{4x - 14000}{9}$, oder auf einerlei Benennung gebracht,

bracht, $\frac{12x - 42000}{9} + \frac{4x - 14000}{9}$, d.i. $\frac{16x - 56000}{9}$.
Am Anfang des dritten Jahrs davon 2000 fl. ab, so bleibt $\frac{16x - 56000}{9} - 2000$, oder $\frac{16x - 56000}{9} - \frac{18000}{9}$, d. i. $\frac{16x - 74000}{9}$. Davon ist der dritte Theil $\frac{16x - 74000}{27}$ also ist das Vermögen am Ende des dritten Jahrs $\frac{16x - 74000}{9} + \frac{16x - 74000}{27}$, d. i. $\frac{48x - 222000}{27} + \frac{16x - 74000}{27}$ oder $\frac{64x - 296000}{27}$. Da nun dieses das Doppelte des anfänglichen Capitals ist, so ergiebt sich die Gleichung $\frac{64x - 296000}{27} = 2x$. Wenn diese Gleichung aufgelößt wird, so findet man $x = 29600$.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

52) Jemand bestimmt in seinem Testament ein gewisses Legat, das unter drei Domestiken auf folgende Art vertheilt werden soll. Der Kammerdiener soll vor allem 200 fl., und dann noch die Hälfte des Rests bekommen. Von dem Uebrigen soll der Koch den fünften Theil, und darüber noch 400 fl. haben. Den Rest, der 520 fl. beträgt, soll der Kutscher erhalten. Wieviel beträgt das Legat, und was erhält der Kammerdiener und der Koch? Antw. Das Legat beträgt 2500 fl. der Antheil des Kammerdieners 1350 fl. und des Kochs 630 fl.

Dritter Abschnitt.

Von den Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit zwei unbekannten Größen.

§. 1.

Es giebt Aufgaben, bei denen nicht blos eine einzige sondern zwei Zahlen gesucht werden. Z. B. zwei Zahlen zu finden, deren Summe, wenn man sie addirt, 30 beträgt, und deren Rest, wenn man sie subtrahirt, 8 ist.

§. 2. In diesem Fall bezeichne man die unbekannten Größen mit x und y, und suche aus den Bedingungen der Aufgabe zwei Gleichungen herzuleiten. Ist dieses möglich, so ist die Aufgabe bestimmt, das heißt, es giebt nur eine einzige Art der Auflösung für sie. Lassen sich aber keine zwei Gleichungen herleiten, so ist die Aufgabe unbestimmt, d. h. sie läßt mehrere Auflösungen zu, oder es findet mehr als ein Werth für iede der gesuchten Zahlen statt.

§. 3. Aus der im §. 1. erwähnten Aufgabe lassen sich folgende zwei Gleichungen herleiten

Die erste ist $x + y = 30$

Die zweite ist $x - y = 8$

§. 4.

§. 4. Nun müßen diese beiden Gleichungen aufgelößt, oder die Werthe der unbekannten Zahlen x und y bestimmt werden.

§. 5. Diese Auflösung kann auf zweierlei Art geschehen.

Erste Art der Auflösung.

Da $x + y = 30$
so ist $x = 30 - y$
da ferner $x - y = 8$
so ist $x = 8 + y$

Das heißt, es wird aus den beiden Gleichungen der Werth der nehmlichen unbekannten Größe entwickelt. Nun ist klar, daß wenn man den Werth von y wüßte, der Werth von x in den beiden Gleichungen $x = 30 - y$ und $x = 8 + y$ leicht berechnet werden könnte, denn man dürfte in der einen nur den Werth des y von 30 subtrahiren, so hätte man den Werth von x, oder in der andern y zu 8 addiren, so hätte man gleichfalls dieses x. Es kommt also blos noch darauf an, den Werth von y zu bestimmen. Dieses geschieht auf folgende Art. Da $30 - y$ dem x gleich ist, und $8 + y$ gleichfalls diesem x gleich ist, so muß $30 - y$ den Werth von $8 + y$ gleich seyn, nach dem Grundsatz: Wenn zwei Werthe einem dritten gleich sind, so sind sie einander gleich. Z. B. 8 Laubthaler betragen 22 fl., 2 Pfund Sterling betragen gleichfalls 22 fl., also

ist der Werth von 8 Laubthalern dem von 2 Pf. Sterling gleich. Folglich hat man die Gleichung:

$$8 + y = 30 - y$$

In dieser Gleichung ist nun blos noch eine von den beiden unbekannten Größen befindlich, daher kann sie nach der Art, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, aufgelößt werden. Nemlich:

da $8 + y = 30 - y$

so ist $y = 30 - y - 8$

und $y + y = 30 - 8$

d. i. $2y = 22$

folglich $y = 11$

Da nun der Werth von y gefunden ist, so darf dieser nur in eine von den obigen Gleichungen $x = 30 - y$ oder $x = 8 + y$ eingesetzt oder substituirt werden, so hat man auch den Werth von x gefunden. Nemlich $x = 30 - 11$ d. i. 19 oder $x = 8 + 11$ welches gleichfalls 19 giebt. Die Probe, daß man richtig gerechnet hat, ist, daß $x + y$ oder $19 + 11$ zur Summe 30 und $x - y$ oder $19 - 11$ zur Differenz 8 giebt.

§. 6. Die andere Art der Auflösung führt meistens auf einen kürzern Weg zu dem gesuchten Resultat, und beruht darauf, daß man entweder durch Addition oder Subtraction der beiden Gleichungen die eine der unbekannten Größen wegzubringen sucht, um eine Gleichung zu erhalten, in der nur noch eine unbekannte Größe enthalten ist, die dann durch gehörige Reduction entwickelt wer-

den

den kann. Es seyen z. B. die beiden gegebenen Gleichuugen

$$4x + 2y = 100$$
$$x + 2y = 40$$

Zieht man nun eine Gleichung von der andern ab, so muß der Rest auch eine Gleichung seyn, weil Gleiches von Gleichem subtrahirt, wieder Gleiches giebt. Man sieht aber, daß wenn man die untere dieser Gleichungen von der darüber stehenden subtrahirt, zugleich die 2 y sich heben, oder Null zum Rest lassen. Nemlich

von $4x + 2y = 100$
subtrahirt $x + 2y = 40$
ist der Rest $3x + 0 = 60$
oder $3x = 60$
woraus dann folgt $x = 20$

Nimmt man hierauf die eine von diesen Gleichungen, z. B. die untere, und entwickelt daraus das y auf folgende schon im vorigen Abschnitt angegebene Art,

$$x + 2y = 40$$
$$2y = 40 - x$$
$$y = \frac{40 - x}{2}$$

und substituirt in dem Ausdruck $\frac{40 - x}{2}$ statt des x den gefundenen Werth 20, so hat man $y = \frac{40 - 20}{2}$, d. i. $y = 10$. Folglich sind nun die beiden Werthe von x und y gefunden.

§. 7.

§. 7. Diese Art der Auflösung sezt aber voraus, daß man auch im Stande ist, wenn Zahlen, die verschiedene Zeichen vor sich haben, in den Gleichungen vorkommen, solche zu addiren oder zu subtrahiren.

§. 8. So ist zwar leicht einzusehen, daß wenn

zu der Gleichung $3x + 4y = 70$
addirt werden soll $4x + 5y = 16$
die Summe seyn wird $7x + 9y = 86$

§. 9. Eben so, daß wenn von der Gleichung

$5x + 8y = 92$
subtrahirt werden soll $2x + 6y = 60$
der Rest seyn wird $3x + 2y = 32$

§. 10. Es sollen aber folgende zwei Gleichungen addirt werden

$$8x + 10y = 45$$
$$3x - 6y = 18$$

so sieht man daß $10y$ das $+$ Zeichen, aber $6y$ das $-$ Zeichen vor sich haben. Es ist also die Frage, wie werden solche Größen, die verschiedene Zeichen haben, addirt? Um die Regel zu finden, nach welcher man zu verfahren hat, suche man folgendes Beispiel zu berechnen.

Zu $18 + 7$
soll addirt werden $6 - 5$

Da $18 + 7 = 25$ und $6 - 5 = 1$ so muß die Summe 26 werden, und diese erhält man,

wenn

wenn man die 6 zu 18 wirklich addirt, dieß giebt 24, und hierauf 5 von 7 subtrahirt, welches 2 giebt, und dieses 2 zu dem 24 addirt. Nemlich man verfährt auf folgende Art:

zu	$18 + 7$
addirt	$6 - 5$
Summe	$24 + 2$

Eben so wird man also auch verfahren, wenn zu

der Gleichung	$8x + 10y = 45$
zu addiren ist	$3x - 6y = 18$
die Summe ist	$11x + 4y = 63$

§. 11. Sollen zwei Zahlen, die verschiedene Zeichen vor sich haben, und wovon die, welche das — Zeichen vor sich hat, größer ist, als die, welche das + Zeichen vor sich hat, addirt werden, so subtrahirt man, die kleinere von der grössern, und sezt vor die gefundene Zahl das — Zeichen. Z. B.

zu	$14 - 8$
addirt	$6 + 2$
giebt zur Summe	$20 - 6$

Denn $14 - 8$ ist $= 6$ und $6 + 2 = 8$, dieses 8 zu 6 addirt, giebt 14, und soviel beträgt auch $20 - 6$. Wenn also zu addiren ist

	$8x - 10y = 40$
	$3x + 6y = 30$
so ist die Summe	$11x - 4y = 70$

§. 12. Die Regel der Addition für Zahlen mit verschiedenen Zeichen ist also im allgemeinen: Man subtrahire die kleinere von der größern Zahl, und setze vor das, was kommt, das Zeichen der größern Zahl.

§. 13. Haben aber die zu addirenden Zahlen einerlei Zeichen vor sich, so addirt man sie wirklich, und sezt das Zeichen, das vor den Zahlen steht, auch vor die Summe.

Exempel der Addition.

Zu	$8x - 7y + 30 = 5x + 2y - 60$
zu addiren	$7x - 5y - 20 = 3x - 10y + 20$
Summe	$15x - 12y + 10 = 8x - 8y - 40$

§. 14. Eben so muß man, wenn eine Gleichung von einer andern zu subtrahiren ist, Acht geben, ob die Zeichen der untereinanderstehenden Glieder einerlei oder verschieden sind. Wie man nun dabei zu verfahren hat, läßt sich so finden. Es ist bekannt, daß wenn man zwei Zahlen addirt, und von ihrer Summe die eine dieser Zahlen subtrahirt, die andere dieser Zahlen als Rest gefunden wird.

Z. B. zu	18
addirt	24
so ist die Summe	42
subtrahirt man nun	24
so erhält man wieder	18

§. 15. Man nehme also die im §. 13. gefundene Summe

$$15x - 12y + 10 = 8x - 8y - 40$$

und suche nun die Regel zu finden, daß wenn man $7x - 5y - 20 = 3x - 10y + 20$ davon subtrahirt, die erste in eben diesem §. 13. angegebene Gleichung $8x - 7y + 30 = 5x + 2y - 60$ wieder zum Vorschein kommt.

Man setze also unter

$$15x - 12y + 10 = 8x - 8y - 40$$

die zweite Gleichung

$$7x - 5y - 20 = 3x - 10y + 20$$

alsdann ändere man alle Zeichen der Glieder dieser zweiten Gleichung, d. h. statt — setze man +, statt + setze man — und verfahre mit dieser so geänderten Gleichung nach den im §. 12. angegebenen Regeln der Addition, so erhält man den gesuchten Rest. Nemlich man verfahre so:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 15x & - 12y & + 10 & = & 8x & - 8y & - 40 \\ 7x & - 5y & - 20 & = & 3x & - 10y & + 20 \\ - & + & + & & - & + & - \\ \hline \text{Rest } 8x & - 7y & + 30 & = & 5x & + 2y & - 60 \end{array}$$

D. h. Da vor 15x kein Zeichen steht, und dieses Glied den Anfang macht, so ist es anzusehen, als wäre es + 15x, das darunter stehende Glied, ist aus dem nehmlichen Grund + 7x, da aber das Zeichen geändert wurde, so ist es — 7x, da also + 15x und — 7x verschiedene Zeichen

haben, so muß nach §. 12., die kleinere Zahl von der größern subtrahirt, und zu dem was kommt das Zeichen der größern gesetzt werden, dieß giebt also + 8x, wo man das + Zeichen wegläßt, weil diese 8x den Anfang machen, oder das erste Glied der Gleichung sind. Hierauf folgt in der obern Gleichung — 12y, darunter steht — 5y welches nach geänderten Zeichen als + 5y betrachtet wird. Nun verfahre man wieder mit diesem — 12y und + 5y nach der im §. 12. angegebenen Regel, so erhält man — 7y. Sodann folgt in der obern Gleichung + 10, darunter steht — 20, welches nach geänderten Zeichen als + 20 betrachtet wird. Da nun + 10 und + 20 einerlei Zeichen haben, so verfährt man nach §. 13., d. h. man addirt sie wirklich und sezt das gemeinschaftliche Zeichen vor, so giebt dieß + 30. So fährt man ferner fort, alsdann erhält man zum ganzen Rest $8x - 7y + 30 = 5x + 2y - 60$. Dieses ist nun wirklich der im Exempel des §. 13. vorkommende zweite Summand, woraus erhellt, daß die angegebene Verfahrungsart die richtige ist.

§. 16. Die Regel der Subtraction, für Zahlen mit einerlei oder verschiedenen Zeichen, ist also folgende:

"Man verwandle alle Zeichen, die vor den „Gliedern der abzuziehenden Zahl stehen, in „die entgegengesetzten, wenn nun zwei unter„einander stehende Glieder einerlei Zeichen ha-

„ben

„ben, so addire man sie, und setze das ge„meinschäftliche Zeichen vor die Summe die„ser beiden Glieder, haben sie aber verschie„dene Zeichen, so subtrahire man das kleinere „von dem größern, und setze zu dem was „kommt das Zeichen des größern Glieds.

§. 17. Diese Regel der Subtraction will ich noch durch ein Beispiel erläutern:

Von	$24x - 13y - 60 = 16x + 7y + 80$
zu subtrah.	$3x + 13y - 60 = 36x + 10y - 40$
	$- \quad - \quad + \quad - \quad - \quad +$
Rest	$21x - 26y \quad = 20x - 3y + 120$

§. 18. Ich kehre nun zu der im §. 1. vorkommenden Aufgabe, und zu den zwei im §. 3. hergeleiteten Gleichungen zurück, und zeige nun die

zweite Art der Auflösung.

Da	$x + y = 30$
und	$x - y = 8$
so ist nach §. 12.	$2x = 38$
also	$x = 19$

und da aus der ersten Gleichung $x + y = 30$

folgt, daß	$y = 30 - x$
so ist also	$y = 30 - 19$
d. i.	$y = 11$

Welches eben die Werthe sind, die im §. 5., vermittelst der ersten Art der Auflösung, für x und y gefunden wurden.

Auf ähnliche Art kann man folgende Aufgabe auflösen. In zwei Beuteln befindet sich eine Summe von 68 fl. in dem einen Beutel sind aber 10 fl. mehr als in dem andern, wie viele Gulden sind in iedem Beutel? Antwort. In dem einen 39 fl. in dem andern 29 fl.

§. 19. Sehr oft kommt der Fall vor, daß wenn man auch die eine Gleichung von der andern subtrahiren oder zu ihr addiren wollte, keine der unbekannten Größen dadurch weggeschaft werden könnte, weil solche in der einen Gleichung mit andern Zahlen multiplicirt sind, als in der zweiten. Z. B. In den beiden Gleichungen:

$$8x + 3y = 60$$
$$x + y = 12$$

sind die unter einander stehenden x und y mit verschiedenen Zahlen multiplicirt, oder sie haben verschiedene Coefficienten. Nemlich in der ersten Gleichung ist 8 der Coefficient von x, in der zweiten aber ist 1 der Coefficient von x, (denn x ist so viel als $1x$), eben so ist in der ersten Gleichung 3 der Coefficient von y, aber in der zweiten Gleichung ist 1 der Coefficient von y. Wenn man also auch die zweite Gleichung von der ersten subtrahiren wollte, so würde dennoch keine von den unbekannten Größen weggeschaft werden können.

§. 20. Indessen läßt sich dieses durch eine Aenderung der zweiten Gleichung bewerkstelligen. Denn

Denn da Gleiches mit Gleichem multiplicirt Gleiches giebt, so erhält man wieder eine Gleichung, wenn man alle Glieder der zweiten Gleichung mit der nehmlichen Zahl multiplicirt. Man nehme also den Coefficienten 3 des y in der ersten Gleichung, und multiplicire damit die zweite, so erhält man $3x + 3y = 36$. Nun nehme man die erste Gleichung

$$8x + 3y = 60$$

und subtrahire von ihr $3x + 3y = 36$

so erhält man $5x = 24$

in welcher Gleichung kein y mehr vorkommt.

§. 21. Eben so, wenn folgende zwei Gleichungen gegeben sind,

$$12x + 4y = 840$$
$$8x + 3y = 620$$

so multiplicire man alle Glieder der zweiten Gleichung mit 4, dem Coefficienten von y in der ersten, und alle Glieder der ersten mit 3, dem Coefficienten von y in der zweiten Gleichung, so erhält man

$$36x + 12y = 2520$$
$$32x + 12y = 2480$$

subtrahirt man hierauf die eine von der andern, so erhält man

$$4x = 40$$

in welcher Gleichung nun keine y mehr vorkommen.

§. 22. Oder man nehme den Coefficienten 12 von x in der ersten Gleichung, und multipli-

cire damit alle Glieder der zweiten, und mit dem Coefficienten 8 von x in der zweiten alle Glieder der ersten, so erhält man

$$96x + 36y = 7440$$
$$96x + 32y = 6720$$

subtrahirt man nun die eine von der andern, so erhält man $4y = 720$

in welcher Gleichung keine x mehr vorkommen.

§. 23. Noch ist zu bemerken, daß man Zahlen, die + vor sich haben, positive, hingegen solche die — vor sich haben, negative nennt. Z. B. (+4) ist eine positive Zahl, aber (— 4) ist eine negative Zahl. Positive und negative Zahlen sind einander entgegengesetzt, in so fern die eine, wenn sie mit der andern verbunden, oder zu ihr addirt wird, in derselben so viel aufhebt, als ihre Größe beträgt. So geben zum Beispiel + 8 und — 5 addirt, die Zahl + 3 zur Summe, (§. 12.) das heißt die negative Zahl 5 vermindert die positive Zahl 8 um 5, wenn sie mit solcher in Verbindung gebracht, oder zu ihr addirt wird. Eben so geben + 5 nnd — 5 zur Summe Null.

§. 24. Eine positive Zahl ist eigentlich als eine Zahl anzusehen, die, wenn irgend eine andere Zahl vorkommt, zu solcher addirt werden soll. Z. B. die positive Zahl + 3 wird, wenn irgend eine andere Zahl z. B. + 8 vorkommt, zu solcher addirt.

addirt. Eine negative Zahl aber ist als eine positive Zahl anzusehen, die, wenn irgend eine andere Zahl vorkommt, von solcher subtrahirt werden soll. Z. B. die negative Zahl — 3 wird, wenn eine positive Zahl, z. B. + 8 vorkommt, mit solcher als gleichartig, d. h. als + 3 betrachtet, und von ihr subtrahirt. Folglich kann auch umgekehrt eine positive Zahl z. B. + 3 die von irgend einer andern z. B. + 8 zu subtrahiren ist, als eine negative Zahl, (als — 3) betrachtet werden, die zu solcher, (zum + 8) zu addiren ist.

Erste Aufgabe.

Ein Leinewandhändler erhielt die Commission zweierlei Sorten Leinewand, die feinere das Stück zu 16 Gulden, die weniger feine das Stück zu 10 Gulden zu übersenden. Er weiß, daß es in allem 63 Stück waren, für die er 780 Gulden berechnete, hat aber vergessen anzumerken, wieviel Stücke von jeder Sorte waren. Man soll dieß durch Rechnung finden.

Erste Art der Auflösung.

Es sey die Anzahl der Stücke der feinern Sorte = x, und die Anzahl der Stücke der weniger feinen = y. Da die Anzahl der Stücke zusammen 63 beträgt, so hat man die erste Gleichung

$$x + y = 63$$

Wenn

Wenn 1 Stück 16 fl. kostet, so kosten die x Stücke 16x fl., und wenn 1 Stück 10 fl. kostet, so kosten die y Stücke 10y fl. Da nun alle Stücke zusammen 780 fl. kosten, so giebt diese die zweite Gleichung $16x + 10y = 780$

Man entwickle y aus der ersten Gleichung, so findet man

$$y = 63 - x$$

Nun entwickle man y auch aus der zweiten Gleichung, so findet man

$$y = \frac{780 - 16x}{10}$$

Nun ist nach §. 5. $63 - x = \frac{780 - 16x}{10}$

folglich $630 - 10x = 780 - 16x$

also $16x + 630 - 10x = 780$

ferner $16x - 10x = 780 - 630$

d. i. $6x = 150$

daher $x = 25$

Nimmt man nun die Gleichung $y = 63 - x$, und substituirt für x das gefundene 25, so ist $y = 63 - 25$ oder 38. Eben den Werth würde man auch für y finden, wenn man in der Gleichung $y = \frac{780 - 16x}{10}$ den gefundenen Werth von x substituiren wollte. Denn alsdann ist $y = \frac{780 - 16.25}{10}$ d. i. $y = \frac{780 - 400}{10}$ oder $y = 38$.

Probe.

Erstens machen 25 Stücke und 38 Stücke zusammen 63 Stücke. Zweitens, wenn 1 Stück 16 fl.

16 fl. kostet, so kosten die 25 Stücke 400 fl., und wenn 1 Stück 10 fl. kostet, so kosten die 38 Stücke 380 fl., dieß beträgt aber zusammen 780 fl.

Zweite Art der Auflösung.

$$\text{N. 1)} \quad x + y = 63$$
$$\text{N. 2)} \quad 16x + 10y = 780$$

Man multiplicire die erste Gleichung mit 10 dem Coefficienten von y in der zweiten

$$10x + 10y = 630$$

Nun subtrahire man diese Gleichung von N. 2. so ist der Rest

$$6x = 150$$
$$\text{also} \quad x = 25$$

Da nun $x + y = 63$, so ist $y = 63 - x$, d. i. $y = 63 - 25$ oder $y = 38$.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

53) Ein Maurer arbeitete mit 12 Personen, sowohl Gesellen als Handlangern an einem Bau, der Meister bekam täglich 1 fl., ein Geselle täglich 40 Kr. und ein Handlanger täglich 30 Kr. Der Wochenlohn betrug in allem 47 fl. Wie viele Gesellen und Handlanger waren es? Antwort. 5 Gesellen und 7 Handlanger.

53) Die Garnison einer gewissen Stadt besteht aus 1200 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Jeder Cavallerist erhält monatlich

6 fl.,

6 fl., ieder Infanterist monatlich 4 fl. Da nun der monatliche Sold im Ganzen sich auf 5600 fl. beläuft, so ist die Frage, wie viele Cavalleristen und und wie viele Infanteristen sind es? Antw. 400 Cavalleristen und 800 Infanteristen.

55) Ein Wechsler hat zweierlei Münzsorten, von der ersten gelten 9 Stücke, von der zweiten 15 Stück einen Thaler. Es verlangt iemand 11 Stücke für einen Thaler, wie viele Stücke erhält er von ieder Sorte? Antw. 6 Stücke von der ersten Sorte, und 5 Stücke von der zweiten.

56) Jemand hat eine gewisse Anzahl Siebzehner und Siebner, in allem 23 Stücke, die 4 fl. 31 Kr. am Werth betragen. Wie viele hat er von ieder Sorte? Antw. 11 Siebzehner und 12 Siebner.

57) Ein Wirth hat zweierlei Sorten Wein, von der bessern kostet die Maas 54 Kr. von der geringern 40 Kr. Er will eine Mischung treffen, die einen Eimer (zu 64 Maas gerechnet,) betragen, und so beschaffen seyn soll, daß er die Maas für 48 Kr. geben kann. Wie viele Maas muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. $36\frac{4}{7}$ Maas von der bessern und $27\frac{3}{7}$ von der geringern.

58) Jemand hat zweierlei Sorten Caffee, von der bessern kostet das ℔ 1 fl. 12 Kr. und von der geringern 48 Kr. Er will eine Mischung treffen, daß er das Pfund für 54 Kr. geben kann. Wieviel muß er von ieder Sorte nehmen? Antw.

So

So viel, daß der vierte Theil der Mischung aus der bessern und $\frac{3}{4}$ aus der geringern besteht.

59) Es hat iemand eine Masse, die aus Zinn und Bley gemischt ist und 12 ℔ wiegt. Er möchte wissen wie viele ℔ Bley in dieser Mischung wären. Er wägt also die Mischung im Wasser, wo sie nur noch $10\frac{1}{2}$ ℔ wiegt, folglich $1\frac{1}{2}$ ℔ von ihrem Gewichte verliert. Da ihm nun bekannt ist, daß Bley $\frac{1}{11}$ seines Gewichts im Wasser verliert, Zinn aber $\frac{1}{7}$, so berechnet er, aus wie vielen ℔ Zinn und Bley die Mischung besteht. Was wird das Resultat dieser Rechnung gewesen seyn? Antwort. $7\frac{7}{8}$ ℔ Zinn und $4\frac{1}{8}$ ℔ Bley.

60) Ein anderer hat eine Masse, die aus Gold und Silber gemischt ist, und zwei Mark wiegt, im Wasser aber 3 Karat verliert, (die M. zu 24 K. gerechnet). Wie viele Karate Gold und Silber sind in dieser Mischung, vorausgesetzt, daß Gold $\frac{1}{19}$, und Silber $\frac{1}{10}$ von seinem Gewicht in Wasser verliert? Antw. 38 Kar. Gold und 10 Karat Silber.

61) Jemand hat eine aus Silber und Kupfer gemischte Masse, die $3\frac{1}{2}$ Mark wiegt, im Wasser aber $5\frac{5}{8}$ Loth am Gewicht verliert. Das Silber verliert überhaupt $\frac{1}{10}$, das Kupfer $\frac{2}{17}$ im Wasser an seinem Gewicht. Es ist die Frage, wie viellöthig die Mischung ist? (Man suche vorher wie viele Loth Silber in der Mischung sind, und dann wie viele Lothe auf eine Mark der Mischung kommen.) Antw. 14löthig.

62) Ein

62) Ein Meister verspricht seinem Gesellen für ieden Tag, den er für ihn arbeitet, 24 Kr. hingegen bezahlt der Geselle alle Sonntage, so wie auch wenn er für einen andern arbeitet, ihm 15 Kr. für die Kost. Nach 50 Tagen rechnen sie mit einander ab, und der Geselle erhält 10 fl. 54 Kr. Wie viele Tage hat er für seinen Meister gearbeitet? Antw. 36 Tage.

63) Es theilt iemand eine gewisse Summe aus, giebt er einer Person 4 fl. so ist solche um 8 fl. zu klein, wollte er einer Person nur 3 fl. geben, so würde er 36 fl. übrig behalten. Wie groß ist die Summe und wie viele Personen sind es? Antw. 168 fl. und 44 Personen.

Zweite Aufgabe.

Ein Goldarbeiter hat 15löthiges und 12löthiges Silber, er will eine Arbeit verfertigen, die 3 Mark wiegen, und 13löthig seyn soll. Wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen?

Auflösung.

Es sey die Anzahl Lothe des 15löthigen Silbers $= x$ und die Anzahl Lothe des 12löthigen Silbers $= y$, so ist erstens $x + y = 48$ Loth, weil 3 Mark so viele Lothe betragen.

Da nun 15löthiges Silber solches ist, das in der Mark oder in 16 Lothen 15 Loth feines Silber enthält, so schliese man, 16 Loth geben 15 Loth

Loth feines Silber, was x Lothe, so findet man $\frac{15x}{16}$ als die Menge des feinen Silbers, das in x Lothen enthalten ist.

Eben so, 16 Loth geben 12 Loth feines Silber, was y Lothe, so findet man $\frac{12y}{16}$, als die Menge feinen Silbers, das in y Lothen enthalten ist.

Da nun die Arbeit 13löthig seyn, oder in einer Mark derselben 13 Loth feines Silber enthalten seyn sollen, so müßen in den 3 Mark derselben 39 Loth feines Silber enthalten seyn.

Also hat man die zweite Gleichung

$$\frac{15x}{16} + \frac{12y}{16} = 39$$

oder $15x + 12y = 39 \cdot 16$ d. i. 624

Ich habe, der Deutlichkeit wegen, diese zweite Gleichung auf diese umständliche Art hergeleitet. Man sieht aber leicht, daß man bei ähnlichen Aufgaben kurz so verfahren kann. Man multiplicire x und y iedes mit seinem Gehalt, hierauf den Mittelgehalt, (der hier 13 ist,) mit der Anzahl der Mark, welche die Arbeit wiegen soll, (hier mit 3) und dieses Product allemal mit 16. So erhält man sogleich die zweite Gleichung

$$15x + 12y = 624$$

Nun nehme man die erste Gleichung $x + y = 48$, und multiplicire sie, mit dem kleinern Coefficienten der einen unbekannten Größe, in diesem Fall mit 12, so erhält man die Gleichung

$$12x + 12y = 576$$

Diese

Diese subtrahire man von der zweiten Gleichung, so ist der Rest

$$3x = 48$$

also $x = 16$

und $y = 48 - x$ oder $48 - 16$ d. i. 32

Man nimmt also von der bessern Sorte 16 Loth und von der geringern 32 Loth.

Probe.

Wenn 1 Mark 15 Loth feines Silber enthält, so enthalten 16 Loth gleichfalls 15 Loth feines Silber und wenn 1 Mark 12 Loth feines Silber enthält, so enthalten 32 Loth oder 2 Mark 24 Loth feines Silber. Folglich ist in der Arbeit zusammen 39 Loth feines Silber. Da sie nun 3 Mark wiegt, so kommen auf die Mark $\frac{39}{3}$ das ist 13 Loth feines Silbers.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

64) Jemand hat zweierlei Silber, 10löthiges und 14löthiges, und will $2\frac{1}{2}$ Mark 13löthiges haben, wieviel muß er von ieder Sorte zur Mischung nehmen? Antw. 30 Loth vom 14löthigen und 10 Lothe vom 10löthigen.

65) Wie muß 9löthiges und 13löthiges Silber gemischt werden, daß es 12löthiges giebt. Antw. Man nimmt zur Mark oder zu 16 Lothen vom 13löthigen Silber 12 Loth, und vom 9löthigen Silber 4 Loth.

Dritte

Dritte Aufgabe.

Ein Goldarbeiter hat zweierlei Sorten Gold, 13karatiges und 20karatiges, wie viele Karate muß er von ieder Sorte zu einer Arbeit nehmen, die 18 Karat halten und 6 Karate wiegen soll?

Auflösung.

Es sey $x =$ der Anzahl Karate der bessern Sorte, und $y =$ der Anzahl Karate der geringern Sorte. Die erste Gleichung ist $x + y = 6$. Die zweite Gleichung wird so hergeleitet: die Mark hat bekanntlich 24 Karat, also schließe man

$$24 : x = 20 : \frac{20x}{24}$$
$$24 : y = 13 : \frac{13y}{24}$$

$\frac{20x}{24}$ ist also die Anzahl Karate feines Gold, die in x Karaten enthalten sind, und $\frac{13y}{24}$ die Anzahl Karate feines Gold, die in y Karaten enthalten sind. Da nun die Mischung 18karatig seyn soll, so wäre

$$\frac{20x}{24} + \frac{13y}{24} = 18$$

wenn die Mischung eine Mark am Gewicht haben sollte, da sie aber nur 6 Karat, oder $\frac{1}{4}$ Mark wiegen darf, so ist

$$\frac{20x}{24} + \frac{13y}{24} = 18 . \tfrac{1}{4}$$

folglich $20x + 13y = 18 . \tfrac{1}{4} . 24$

d. i. $20x + 13y = 108$

Man sieht leicht, daß man auch hier, wie bei der vorigen Aufgabe, die zweite Gleichung

bequem formiren kann, wenn man sogleich x und y, jedes mit dem entsprechenden Gehalt multiplicirt, sodann den Mittelgehalt mit 24 und dem Gewicht, das die Mischung haben soll, in Mark oder Theilen derselben ausgedrückt, multiplicirt.

Hierauf multiplicire man die erste Gleichung $x + y = 6$ mit dem kleinern Coefficienten der einen unbekannten Größe, der hier 13 ist, so hat man $13x + 13y = 78$

Diese Gleichung subtrahire man von der Gleichung $20x + 13y = 108$
so ist der Rest $7x = 30$
also $x = 4\frac{2}{7}$
folglich $y = 6 - x$ d. i. $6 - 4\frac{2}{7}$ oder $1\frac{5}{7}$.

Probe.

Wenn in 24 Karaten 20 Karat f. G. sind, so sind in $4\frac{2}{7}$ K. $3\frac{4}{7}$ K. f. G. und wenn in 24 K. 13 K. f. G. sind, so sind in $1\frac{5}{7}$ K. $\frac{13}{14}$ K. f. G. Zusammen also $3\frac{4}{7} + \frac{13}{14}$ K. f. G. oder $4\frac{1}{2}$ Kar. f. G. in den 6 Karaten. Folglich in einer Mark oder 24 Karaten 18 K. f. G. Also die Mischung 18karatig.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

66) Jemand hat 10karatiges und 17karatiges Gold, er will eine 15karatige Mischung haben, die $1\frac{1}{2}$ Mark wiegen soll. Wie viele Karate muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. $25\frac{5}{7}$ Karate vom 17kar. und $10\frac{2}{7}$ Karate von 10kar.

67) Aus

67) Aus 11karatigem und 22karatigem Golde soll 17karatiges gemischt werden. Wie viele Karate müßen von ieder Sorte genommen werden? Antw. $13\frac{1}{11}$ Karate von der bessern und $10\frac{10}{11}$ Karate von der geringern.

Vierte Aufgabe.

Wieviel 8löthiges Silber muß zu $7\frac{1}{2}$ Mark 13löthigem gesetzt werden, wenn der Gehalt der Mischung 9löthig werden soll?

Auflösung.

Die gesuchte Anzahl Mark des 8löthigen Silbers sey $= y$. Das Gewicht der Mischung $= z$ Mark. So ist N. 1) $7\frac{1}{2} + y = z$.

Wenn nun 1 Mark 13 Loth f. S. enthält, so enthalten $7\frac{1}{2}$ M. $97\frac{1}{2}$ Loth fein Silber. Ferner, wenn 1 Mark 8 Loth f. S. enthält, so enthalten y M. 8y Loth fein Silber.

Endlich wenn 1 Mark der Mischung 9 Loth f. S. enthält; so enthalten z Mark 9z Loth f. S. Also hat man die zweite Gleichung:

N. 2) $97\frac{1}{2} + 8y = 9z$

Man multiplicire die Gleichung N. 1) mit 8, so hat man $60 + 8y = 8z$
subtrahirt von N. 2) so ist der Rest: $37\frac{1}{2} = z$.

Aus N. 1) folgt, daß $y = z - 7\frac{1}{2}$, d. i. $37\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}$ oder 30 Mark.

Probe.

Wenn 30 Mark vom 8löthigen Silber zugesetzt werden, so enthalten diese 240 Loth f. S. Die $7\frac{1}{2}$ Mark vom 13löthtgen Silber enthalten $97\frac{1}{2}$ Loth f. S. Folglich sind in der Mischung in allem $240 + 97\frac{1}{2}$ d. i. $337\frac{1}{2}$ Loth f. Silber. Nun wiegt die Mischung $37\frac{1}{2}$ Mark, also kommen auf eine Mark derselben 9 Loth fein Silber.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

68) Wieviel 10löthiges Silber muß man zu 2 Mark 14löthigem setzen, wenn die Mischung 13löthig werden soll? Antw. $\frac{2}{3}$ Mark. Die Mischung aber wiegt in allem $2\frac{2}{3}$ Mark.

69) Wieviel 12karatiges Gold muß zu einer Mark 20karatiges gesetzt werden, wenn die Mischung 18karatig werden soll? Antw. $\frac{1}{3}$ Mark, oder 8 Karat. Die Mischung aber wiegt $1\frac{1}{3}$ M.

Fünfte Aufgabe.

Jemand hat 35 Mark 15löthiges Silber, und will soviel Kupfer zusetzen, daß die Mark der Mischung 12löthig werde. Wieviel Mark Kupfer werden als Zusatz erfordert?

Auflösung.

Die gesuchte Anzahl Mark Kupfer sey $= y$
Das Gewicht der Mischung sey $= z$ Mark.
So ist N. 1) $35 + y = z$.

Wenn

Wenn eine Mark 15 Loth feines Silber enthält, so enthalten 35 Mark, 525 Loth f. S.

Ferner, wenn eine Mark der Mischung 12 Loth f. S. enthält, so enthalten z Mark, 12z Loth feines Silber.

Durch den Zusatz von Kupfer, wird blos das Verhältniß des Silbers zum Kupfer, aber nichts an der Menge des feinen Silbers geändert, es müssen also in den z Mark eben so viele Lothe feines Silber enthalten seyn, als in den 35 Mark. Daher hat man die zweite Gleichung:

N. 2) $525 = 12z$, folglich $43\frac{3}{4} = z$

Nun ergiebt sich aus der Gleichung N. 1., daß $y = z - 35$. Also ist $y = 43\frac{3}{4} - 35$, oder $y = 8\frac{3}{4}$.

Probe.

Wenn 35 Mark 525 Loth feines Silber enthalten, so enthalten durch den Zusatz von blosem Kupfer nun die $43\frac{3}{4}$ Mark der Mischung soviel. Also eine Mark der Mischung 12 Lothe. Da nun vorher 35 Mark waren, iezt aber $43\frac{3}{4}$, so sind $8\frac{3}{4}$ Mark Kupfer hinzugekommen.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

70) Jemand hat 7 Mark 14löthiges Silber, und will soviel Kupfer zusetzen, daß die Mischung 13löthig werde. Wie viele Mark Kupfer werden erfordert? Antw. $\frac{7}{13}$ Mark Kupfer, oder 8 Loth, $2\frac{6}{13}$ Q. Die Mischung aber wiegt $7\frac{7}{13}$ Mark.

Sechste Aufgabe.

Zwei Bombardiere werfen Bomben aus einer Batterie. Ehe der zweite anfängt, hat der erste schon 36 Würfe gemacht, und wirft nun 8 Bomben in eben der Zeit, in der der zweite 7 wirft, hingegen braucht der zweite zu 3 Würfen soviel Pulver als der erste zu 4. Wie viele Würfe wird der zweite machen müssen, bis er soviel Pulver verbraucht als der erste, und wie viele Würfe hat dann der erste gemacht?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Würfe des zweiten $= y$. Ferner die Anzahl der Würfe des ersten, während der Zeit, da der andere y Würfe thut $= x$, so hat der erste in allem $x + 36$ Würfe gemacht.

Nun verhält sich nach der Bedingung der Aufgabe $8 : 7 = x : y$
folglich ist $\frac{7x}{8} = y$.

Gesetzt nun es brauche der erste zu 4 Würfen a Pfunde Pulver, so braucht, nach der zweiten Bedingung der Aufgabe, der andere zu 3 Würfen diese a Pfunde. Folglich braucht zu einem Wurf der erste $\frac{a}{4}$ ℔ und der zweite $\frac{a}{3}$ Pfunde Pulver. Also der zweite zu y Würfen $\frac{ay}{3}$ Pfunde, und der erste zu $x + 36$ Würfen, $\frac{a(x+36)}{4}$ Pfunde. Da nun beide gleich viele Pfunde Pulver verbrauchen, so ist $\frac{ay}{3} = \frac{a(x+36)}{4}$

oder $\frac{y}{3} = \frac{x+36}{4}$

also $y = \frac{3x+108}{4}$

Nun

Nun ist nach dem obigen auch $y = \frac{7x}{8}$,

folglich ist $\frac{7x}{8} = \frac{3x + 108}{4}$

also $7x = 6x + 216$

daher $x = 216$

folglich $x + 36 = 252$ Würfen

und $y = \frac{7 \cdot 216}{8}$ oder 189 Würfen.

Probe.

Wenn der erste zu 4 Würfen a Pfunde Pulver braucht, so braucht er zu 252 Würfen 63 a Pfunde Pulver. Wenn der zweite zu 3 Würfen a Pfund Pulver braucht, so braucht er zu 189 Würfen 63 a Pfunde Pulver. Also einer soviel wie der andere.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

71) Zwei Artilleristen füllen Patronen, der erste hat schon 20 fertig, da der zweite anfängt, und füllt 10 Patronen in eben der Zeit, in welcher der zweite 9 füllt, hingegen braucht der zweite zu 5 Patronen soviel Pulver als der erste zu 6. Wie viele Patronen muß der zweite füllen, bis er soviel Pulver verbraucht als der erste, und wie viele hat der erste in allem gefüllt? Antw. Der erste hat in allem 270 und der zweite 225 Patronen gefüllt.

Siebente Aufgabe.

Aus zwei Röhren, die gleichförmig laufen, fließt Wasser in ein Bassin. Das Wasser, welches aus der ersten Röhre in 12 Stunden fließt, macht mit dem, welches aus der zweiten in 18 Stunden fließt, 3870 Maas. Läßt man aber die erste Röhre 15 Stunden und die zweite 7 Stunden laufen, so erhält man zusammen 2745 Maas. Wie viele Maas laufen in einer Stunde aus ieder Röhre?

Auflösung.

Die Anzahl Maase Wasser, die aus der ersten Röhre in einer Stunde fließen, sey $= x$.

Die Anzahl Maase Wasser, die aus der zweiten Röhre in einer Stunde fließen $= y$.

Da aus der ersten Röhre in einer Stunde x Maase fließen, so fließen in 12 Stunden, $12x$ Maase heraus, und in 15 Stunden, $15x$ Maas.

Da aus der zweiten Röhre in einer Stunde y Maase fließen, so fließen in 18 Stunden $18y$ und in 7 Stunden $7y$ Maase heraus.

Also hat man folgende zwei Gleichungen

1) $15x + 7y = 2745$

und 2) $12x + 18y = 3870$

Da sich die zweite Gleichung durchaus mit 6 dividiren läßt, so kann man dieß der Bequemlichkeit der Rechnung wegen thun, so erhält man

$$2x + 3y = 645$$

Nun

Nun kann man die beiden Gleichungen
$15x + 7y = 2745$ und $2x + 3y = 645$
auf zweierlei Art auflösen.

Erste Art der Auflösung.

Man entwickle aus jeder Gleichung das y. Aus der ersten Gleichung erhält man $y = \frac{2745 - 15x}{7}$
Aus der zweiten Gleichung $y = \frac{645 - 2x}{3}$
Folglich ist $\frac{2745 - 15x}{7} = \frac{645 - 2x}{3}$
Also $8235 - 45x = 4515 - 14x$
Folglich $3720 = 31x$
Daher $120 = x$
Da nun $y = \frac{645 - 2x}{3}$, so ist $y = \frac{645 - 240}{3}$
oder $y = 135$.

Zweite Art der Auflösung.

Die beiden Gleichungen waren
1) $15x + 7y = 2745$
2) $2x + 3y = 645$

Man multiplicire die erste mit 3, (dem Coefficienten von y in der zweiten Gleichung) und die zweite Gleichung mit 7 (dem Coefficienten von y in der ersten) so erhält man

statt aus 1) $45x + 21y = 8235$
und statt 2) $14x + 21y = 4515$
Man subtrahire, so erhält man $31x = 3720$
folglich $x = 120$

Nun

Nun entwickle man den Werth von y aus der ersten oder der zweiten Gleichung. Der aus der zweiten Gleichung entwickelte Werth von y ist $= \frac{645 - 2x}{3}$, in ihm substituire man statt x den gefundenen Werth 120, so erhält man $y = \frac{645 - 2 \cdot 120}{3}$, d. i. $y = \frac{645 - 240}{3}$ oder $y = 135$.

Probe.

Wenn aus der ersten Röhre in einer Stunde 120 und folglich in 15 Stunden 1800 Maas laufen, und aus der zweiten in einer Stunde 135, also in 7 Stunden 945 Maas, so beträgt dieß zusammen 2745 Maas. Und eben so beträgt 12mal 120 und 18mal 135 zusammen 3870 Maas.

Anmerkung.

Gesetzt, es wäre in der Aufgabe noch angegeben, wie viele Maas das Bassin faßt, so kann nun auch leicht bestimmt werden, in wie viel Stunden solches gefüllt werde, wenn beide Röhren zugleich laufen. Es sey nemlich die gesuchte Zeit $= z$, und das Bassin fasse 8000 Maas. Da nun in einer Stunde aus der ersten Röhre 120 und aus der zweiten 135, folglich zusammen 255 Maas laufen, so verhalten sich 255 Maas zu 8000 Maas, wie eine Stunde zu z Stunden, also $z = \frac{8000}{255}$ oder $31\frac{19}{51}$ Stunden.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

72) Ein Bassin, das 210 Eimer fäßt, kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Bei einem

ange-

angestellten Versuch ließ man die erste 4 und die zweite 5 Stunden offen, und erhielt 90 Eimer. Ein anderer Versuch, bei welchem die erste Röhre 7 und die zweite $3\frac{1}{2}$ Stunden offen war, gab 126 Eimer. Wie viele Eimer fließen in einer Stunde aus ieder Röhre? Ferner, nach wieviel Stunden wird das Bassin gefüllt seyn, wenn beide Röhren zugleich geöffnet sind?

73) Jemand hat zu verschiedenen Zeiten zweierlei Waaren gekauft, und in seinem Haushaltungsbuch blos angemerkt, daß 8 Pfund der ersten Gattung und 11 Pfund der zweiten zusammen 9 fl. 12 Kr. kosteten, und so auch, daß er beim zweiten Einkauf für 10 ℔ der ersten Gattung und 3 ℔ der zweiten zusammen 7 fl. 12 Kr. bezahlte. Da er nun weiß, daß während der Zeit des ersten und zweiten Einkaufs der Preis dieser Waaren sich nicht änderte, so möchte er wissen, wie hoch ein Pfund von ieder Waare gekommen ist? Antw. Ein Pfund der erstern Gattung kostete 36 Kr. und ein Pfund der zweiten 24 Kr.

Achte Aufgabe.

Zwei Kaufleute A und B legen ein Kapital zu einem Geschäft zusammen, und zwar A 400 fl. mehr als B, nun erhält A vom Gewinn 850 fl. und B 680 fl., wieviel hat ieder eingelegt?

Auf-

Auflösung.

Die Einlage des A sey $= x$ des B $= y$

so verhält sich $850 : 680 = x : y$

d. i. $85 : 68 = x : y$

also $\frac{68x}{85} = y$

Es ist aber y auch $= x - 400$

folglich ist $\frac{68x}{85} = x - 400$

also $68x = 85x - 34000$

und $34000 = 85x - 68x$

d. i. $34000 = 17x$

also $2000 = x$

und $y = x - 400$, d. i. $= 1600$.

Probe.

Es verhält sich 2000 zu 1600 wie 5 zu 4 und der Gewinn des A zu dem des B wie 850 : 680, d. i. wie 85 : 68, oder wenn man mit 17 hebt, gleichfalls wie 5 : 4.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

74) Zwei Gläubiger erhalten bei einem Concurs, der erste 1000 fl. der zweite 800 fl., der erste hatte 500 fl. mehr zu fordern als der zweite, wieviel betrug die Forderung eines jeden? Des ersten 2500 fl. und des zweiten 2000 fl.

Neun-

Neunte Aufgabe.

Zwei Handelsleute A und B legen ein Kapital zusammen, und zwar A 800 fl. weniger als B, aber 3 Monate früher als B. Nach 7 Monaten gewinnen sie beträchtlich, und A erhält vom Gewinnst 2142 fl., B aber 1768 fl. Wieviel hat jeder eingelegt?

Auflösung.

Die Einlage des A sey $= x$, des B $= y$. Nun verhalten sich, nach der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, die einzelnen Gewinne wie die Producte aus den Einlagen in die correspondirenden Zeiten, d. i. $2142 : 1768 = 7x : 4y$ oder wenn man mit 34 hebt, $63 : 52 = 7x : 4y$

folglich ist $\frac{364x}{63} = 4y$

oder $\frac{91x}{63} = y$

Es ist aber, nach der Bedingung der Aufgabe auch $x + 800 = y$

folglich $\frac{91x}{63} = x + 800$

oder $\frac{13x}{9} = x + 800$

folglich $13x = 9x + 7200$

daher $4x = 7200$

also $x = 1800$

und folglich $y = 2600$

Probe.

$(1800.7) : (2600.4)$ oder $12600 : 10400$ verhält sich wie $63 : 52$. Eben so verhalten sich aber auch die einzelnen Gewinnste.

Aehn-

Aehnliches Exempel zur Uebung.

75) Die Einlage des A ist um 320 fl. grösser als die des B, auch hat A sein Geld ein Monat länger im Handel stehen als B. Nach sechs Monaten endigen sie das Geschäft, A erhält vom Gewinn 1032 fl. und B nur 540 fl. Wie groß war die Einlage eines ieden? Antw. Die des A 860 fl. und des B 540 fl.

Zehnte Aufgabe.

A und B legen ein Kapital von 8000 fl. zusammen. Nach Endigung des Geschäfts erhält A mit Einlage und Gewinn zusammen 6966 fl. und B zieht Einlage und Gewinn zusammwen 3354 fl. Wieviel hat ieder eingelegt?

Auflösung.

Die Einlage des A sey $= x$, die des B $= y$, so ist $x + y = 8000$

Man setze, der Gewinn des A war a fl., und des B b fl., so ist $a + b$ der ganze Gewinn.

Nun ist $x + a = 6966$

$y + b = 3354$

also $x + y + a + b = 10320$

davon ab $x + y = 8000$

so bleibt $a + b = 2320$

Nun

Nun verhält sich nach der Gesellschaftsrechnung

$$8000 : 2320 = x : a$$

oder mit 80 gehoben $100 : 29 = x : a$

folglich $\frac{29x}{100} = a$

da aber $x + a = 6966$

so ist auch $a = 6966 - x$

also $\frac{29x}{100} = 6966 - x$

folglich $29x = 696600 - 100x$

und $129x = 696600$

also $x = 5400$

Da nun $x + y = 8000$, so ist $y = 8000 - x$, d. i. $y = 8000 - 5400$ oder $y = 2600$

Probe.

Man berechne a aus der Formel $\frac{29x}{100} = a$, so findet man 1566 als den Gewinn des ersten. Dazu addirt 5400, giebt Einlage nebst Gewinn des A = 6966. Dann subtrahire man a von a + b, so giebt der Rest b, oder den Gewinn des zweiten. Nemlich a + b ist 2320, davon ab 1566 bleibt 754 für b. Dazu addirt y oder 2600 giebt 3354, welches die Summe der Einlage und des Gewinn des B ist.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

76) Bei einem Handlungsgeschäft betragen die Einlagen des A und B zusammen 1350 fl. Da sie nach einiger Zeit sich trennen, zieht A mit seiner Einlage und seinem Gewinn zusammen 960 fl. und B eben so 660 fl. Wieviel betrug

die Einlage eines jeden? Antw. Die des A 800 fl. und des B 550 fl.

Eilfte Aufgabe.

Zwei Männer trugen einige Säcke, der eine klagte, daß er so schwer zu tragen hätte, der andere antwortete, du hast keinen Grund dich zu beschweren, denn wenn ich einen Sack dir abnehmen wollte, so würde ich zweimal soviel Säcke zu tragen haben als du, wenn du aber einen mir abnehmen wolltest, würden wir erst beide gleich viele tragen. Wie viele Säcke trug jeder?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Säcke des ersten Trägers $= x$, die des zweiten $= y$. Wenn der zweite dem ersten einen Sack abnimmt, so hat er nun $y + 1$, und der erste $x - 1$ Säcke. Da nun in diesem Fall der zweite doppelt soviel Säcke trüge, als der erste, so ergiebt sich die Gleichung

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

oder $$y + 1 = 2x - 2$$

Wollte aber der erste dem zweiten einen Sack abnehmen, so hätte nun der zweite $y - 1$ und der erste $x + 1$ Säcke, und da sie nun in diesem Fall gleichviele zu tragen hätten, so ergiebt sich die zweite Gleichung

$$y - 1 = x + 1.$$

Nun

Nun nehme man die erste Gleichung

$$y + 1 = 2x - 2$$

und subtrahire davon die zweite

$$\begin{array}{rcl} y - 1 & = & x + 1 \\ - \; + & & - \;\;\; - \\ \hline 2 & = & x - 3 \end{array}$$

so ist nach §. 16. der Rest $2 = x - 3$

folglich $5 = x$

Da nun $y - 1 = x + 1$ so ist $y = x + 2$ oder 7.

Man kann die beiden Gleichungen $y + 1 = 2x - 2$ und $y - 1 = x + 1$ auch so auflösen. Aus der ersten folgt, daß $y = 2x - 3$, und aus der zweiten, daß $y = x + 2$

folglich ist $2x - 3 = x + 2$

also $2x = x + 5$

und $x = 5$

folglich $y = 7$.

Probe.

$7 + 1 = 8$ und $5 - 1 = 4$. Aber 8 ist das Doppelte von 4. Ferner $7 - 1 = 6$ und $5 + 1$ ist auch $= 6$.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

77) Zwei Hirten, von denen ieder eine beträchtliche Anzahl Schaafe hatte, fanden, daß wenn der Erste an den Zweiten 60 Schaafe abgeben wollte, beide gleichviele haben würden, daß aber, wenn der zweite an den ersten 30 Schaafe abgeben würde, die Heerde des ersten viermal so

Bayerische Staatsbibliothek München

groß seyn würde, als die Heerde des zweiten. Wie viele Schaafe hatte ieder? Antw. Der zweite 90, und der erste 210.

78) Ein Landmann will seinem Nachbar einen Morgen Land abkaufen. Dieser weigert sich, und sagt: Du würdest dann dreimal soviel Land besitzen als ich, ich will dir lieber einen Morgen abkaufen, du hast dann doch noch doppelt soviel als ich. Wie viele Morgen hatte ieder? Antw. Der Landmann 17 und sein Nachbar 7 Morgen.

79) Ein Knabe sprach zum andern, hätte ich nur noch 9 Kr. von Deinem Gelde, so hätte ich siebenmal soviel, als Du dann hättest. Du bist unmäßig in Deinen Wünschen, sagte der andere, gieb mir lieber 9 Kr. von Deinem Geld, damit wir beide gleichviel haben. Wieviel Geld hatte ieder Knabe? Antw. Der erste 33 Kr. und der andere 15 Kr.

80) In einer Familie waren mehrere Kinder. Auf die Frage, wieviel ihrer wären, antwortete der älteste Sohn, ich habe soviel Schwestern als Brüder, die älteste Tochter aber sagte: ich habe nur halb soviel Schwestern als Brüder. Wie viele Kinder waren es? Antw. 4 Söhne und 3 Töchter.

Vierter Abschnitt.

Von den Zahlengleichungen vom ersten Grad, mit drei und mehr unbekannten Größen.

§. 1.

Es giebt Aufgaben bei denen drei und oft noch mehr unbekannte Zahlen gesucht werden. Sind die Aufgaben bestimmt, d. h. findet bei ihnen für iede unbekannte Zahl nur ein einziger Werth statt, so müssen sich so viele Gleichungen aus ihnen herleiten lassen, als Zahlen gesucht werden.

§. 2. Gleichungen, die drei unbekannte Größsen enthalten, werden auf eine ähnliche Art behandelt, wie die Gleichungen, die nur zwei unbekannte Größen enthalten.

Z. B. Es seyen aus einer gewissen Aufgabe folgende drei Gleichungen hergeleitet worden,

$$\text{N. 1)} \quad 3x + 6y + 5z = 70$$
$$\text{N. 2)} \quad 2x + 5y + 7z = 56$$
$$\text{N. 3)} \quad 5x + 3y + 2z = 80$$

die, wie man sieht, drei unbekannte Größen enthalten, so können solche auf zweierlei Art aufgelößt werden.

Erste Art der Auflösung.

1) Man entwickle aus ieder dieser drei Gleichungen den Werth von x.

Also, da $3x + 6y + 5z = 70$

so ist $3x = 70 - 6y - 5z$

folglich $x = \frac{70 - 6y - 5z}{3}$

Ferner, da $2x + 5y + 7z = 56$

so ist $x = \frac{56 - 5y - 7z}{2}$

Endlich, da $5x + 3y + 2z = 80$

so ist $x = \frac{80 - 3y - 2z}{5}$

2) Nun setze man den ersten Werth von x dem zweiten gleich, und entwickle den Werth von y.

Nemlich $\frac{70 - 6y - 5z}{3} = \frac{56 - 5y - 7z}{2}$

also $140 - 12y - 10z = 168 - 15y - 21z$

folglich $15y - 12y = 168 - 140 + 10z - 21z$

daher $3y = 28 - 11z$

endlich $y = \frac{28 - 11z}{3}$.

3) Hierauf nehme man wieder den ersten Werth von x, setze ihn dem dritten gleich, und entwickle aufs neue den Werth von y.

Nemlich $\frac{70 - 6y - 5z}{3} = \frac{80 - 3y - 2z}{5}$

also

also $350 - 30y - 25z = 240 - 9y - 6z$

folglich $350 - 240 + 6z - 25z = 30y - 9y$

d. i. $110 - 19z = 21y$

endlich $\frac{110 - 19z}{21} = y.$

4) Nun setze man die beiden gefundenen Werthe von y einander gleich, so hat man eine Gleichung, in der noch eine einzige unbekannte Größe z vorkommt, deren Werth also, wenn man sie entwickelt hat, durch lauter bekannte Zahlen bestimmt wird.

Nemlich $\frac{28 - 11z}{3} = \frac{110 - 19z}{21}$

Also $196 - 77z = 110 - 19z$

Daher $86 = 58z$

und $\frac{86}{58} = z$

oder $1\frac{14}{92} = z$

Da der Werth von z gefunden ist, so kann man nun auch die Werthe von x und y berechnen. Man nehme nehmlich einen von den Werthen des y. Zum Beispiel:

$$y = \frac{28 - 11z}{3}$$

und substituire statt z den eben gefundenen Werth $1\frac{14}{29}$, so hat man

$$y = \frac{28 - 11 . 1\frac{14}{29}}{3}$$

oder $y = \frac{28 - 16\frac{9}{29}}{3}$

 d. i.

d. i. nach gehöriger Berechnung, $y = 3\frac{26}{29}$.

Alsdann nehme man einen von den Werthen des x. Zum Beispiel:

$$x = \frac{56 - 5y - 7z}{2}$$

und substituire statt z und y die berechneten Werthe $1\frac{14}{29}$ und $3\frac{26}{29}$, so hat man

$$x = \frac{56 - 5 . 3\frac{26}{29} - 7 . 1\frac{14}{29}}{2}$$

oder nach gehöriger Berechnung

$$x = \frac{56 - 19\frac{14}{29} - 10\frac{11}{29}}{2}$$

woraus folgt $x = 13\frac{2}{29}$

Also hat man die drei unbekannten Größen gefunden, nemlich $x = 13\frac{2}{29}$, $y = 3\frac{26}{29}$ und $z = 1\frac{14}{29}$.

Zweite Art der Auflösung.

Es seyen wie vorhin, die drei gegeben Gleichungen:

N. 1) $3x + 6y + 5z = 70$
N. 2) $2x + 5y + 7z = 56$
N. 3) $5x + 3y + 2z = 80$

Man nehme N. 1 und N. 2) und suche durch Subtraction oder Addition eine der unbekannten Größen wegzuschaffen. Da aber iede dieser unbekannten Größen, in der einen Gleichung einen andern Coefficienten hat, als in der andern, so nehme man den Coefficienten von z, (wenn man nemlich z wegschaffen will) d. h. 5 in N. 1., und mul-

multiplicire damit alle Glieder von N. 2., hierauf nehme man den Coefficienten 7 von z in N. 2. und multiplicire damit alle Glieder von N. 1., so erhält z in den beiden neuen Gleichungen einerlei Coefficienten, und wird also durch Subtraction weggeschaft, wenn z in beiden Gleichungen einerlei Zeichen vor sich hat, oder durch Addition, wenn z in der einen das Zeichen + in der andern aber das Zeichen — vor sich hat.

Also wird aus N. 1) $21x + 42y + 35z = 490$
N. 2) $10x + 25y + 35z = 280$
Erster Rest $11x + 17y = 210$

Auf ähnliche Art verfahre man mit N. 1. und N. 3., indem man N. 1. mit 2, dem Coefficienten von z in der dritten Gleichung und N. 3. mit 5 dem Coefficienten von z in N. 1. multiplicirt.

Also wird aus N. 3) $25x + 15y + 10z = 400$
und aus N. 1) $6x + 12y + 10z = 140$
Zweiter Rest $19x + 3y = 260$

Hierauf verfahre man auf ähnliche Art mit dem ersten und zweiten Rest, multiplicire den ersten mit 3 (dem Coefficienten von y im zweiten Rest) und den zweiten mit 17, (dem Coefficienten von y im ersten,) so erhält man

aus dem zweiten $323x + 51y = 4420$
aus dem ersten $33x + 51y = 630$
Neuer Rest $290x = 3790$
also $x = 13\frac{2}{29}$

Da nun x gefunden ist, so suche man daraus y zu berechnen. Man nehme also entweder den ersten oder den zweiten Rest, und entwickle daraus den Werth von y. Z. B. Der zweite Rest ist

$$19x + 3y = 260$$

daraus folgt $y = \frac{260 - 19x}{3}$

Nun substituire man statt x den gefundenen Werth desselben, so hat man:

$$y = \frac{260 - 19 . 13\frac{2}{29}}{3}$$

oder $y = \frac{260 - 248\frac{9}{29}}{3}$

d. i. $y = 3\frac{26}{29}$

Endlich nehme man entweder die Gleichung N. 1 oder N. 2. oder N. 3. selbst, und entwickle aus solcher den Werth von z. Z. B. Die Gleichung N. 1. ist $3x + 6y + 5z = 70$

also $5z = 70 - 3x - 6y$

und $z = \frac{70 - 3x - 6y}{5}$

Hierauf substituire man statt x und y die berechneten Werthe $13\frac{2}{29}$ und $3\frac{26}{29}$,

so hat man $z = \frac{70 - 3 . 13\frac{8}{29} - 6 . 3\frac{26}{29}}{5}$

oder $z = \frac{70 - 39\frac{6}{29} - 23\frac{11}{29}}{5}$

d. i. $z = 1\frac{14}{29}$.

Wollte man statt der Gleichung N. 1. die Gleichung N. 2. oder N. 3. nehmen, und daraus z ent-

entwickeln, und hierauf die vorhin berechneten Werthe von x und y in ihr gehörig substituiren, so würde man für z den nehmlichen Werth $1\frac{14}{29}$ finden.

§. 3. Ist eine Aufgabe so beschaffen, daß sie vier oder noch mehrere unbekannte Größen enthält, und lassen sich aus ihr so viele Gleichungen herleiten, als unbekannte Größen gesucht werden, so verfährt man auf ähnliche Art, um die Werthe der einzelnen unbekannten Größen aus den Gleichungen zu entwickeln.

Erste Aufgabe.

Jemand hinterläßt folgendes Testament. Ich verordne, daß mein Vermögen, welches 13600 fl. beträgt, so vertheilt werde, daß meine schwangere Frau, wenn sie einen Sohn zur Welt bringt $\frac{3}{5}$ und der Sohn $\frac{2}{5}$ davon erhalte, bringt sie aber eine Tochter, so soll sie $\frac{5}{8}$ und die Tochter $\frac{3}{8}$ des Vermögens erhalten. Nun kam die Frau mit Zwillingen nieder, und zwar mit einem Sohn und einer Tochter, wieviel erhielt iedes dem Testamente gemäß.

Auflösung.

Der Antheil der Mutter sey = x, des Sohns = y, der Tochter = z, so ist

$$1)\ x + y + z = 13600$$

Ferner $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = x : y$

oder $3 : 2 = x : y$

folg-

folglich ist die zweite Gleichung $\frac{2x}{3} = y$
Endlich verhält sich $\frac{5}{8} : \frac{3}{8} = x : z$
oder $5 : 3 = x : z$
folglich ist die dritte Gleichung $\frac{3x}{5} = z$

Nun könnte man wohl diese Gleichungen auf die vorhin angezeigte Art behandeln, um die unbekannten Größen zu finden. Allein bei dieser Aufgabe kann man viel kürzer so verfahren:

$$\text{da } x + y + z = 13600$$

so substituire man für y und z die Werthe $\frac{2x}{3}$ und $\frac{3x}{5}$, so hat man die Gleichung

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} = 13600$$

da in dieser Gleichung nur noch x enthalten sind, so läßt sich die unbekannte Größe x leicht entwickeln, es ist nehmlich

$$3x + 2x + \frac{9x}{5} = 40800$$

folglich $15x + 10x + 9x = 204000$
d. i. $34x = 204000$
also $x = 6000$
daher $y = \frac{2x}{3}$ oder $= 4000$
und $z = \frac{3x}{5}$ oder $= 3600$

Probe 13600

Aehnliche Exempel zur Uebung.

81) Gesetzt es hätte der Verstorbene die testamentliche Verordnung so gemacht, daß die Mutter zweimal soviel als die Tochter, der Sohn aber zweimal soviel als die Mutter erhalten solle, und die

die Mutter wäre mit Zwillingen einem Sohn und einer Tochter niedergekommen, wieviel betrüge dann der Antheil eines jeden, wenn das hinterlassene Vermögen aus 7140 fl. bestände? Antw. Die Mutter würde 2040, die Tochter 1020 und der Sohn 4080 fl. erhalten.

82) Wie aber wenn eben diese Frau mit Drillingen niederkäme, wovon zwei Knäbchen und eines ein Mädchen wäre? Antw. Dann würde die Mutter $1298\frac{2}{11}$, jeder Sohn $2596\frac{4}{11}$ und die Tochter $649\frac{1}{11}$ fl. bekommen.

83) Endlich wenn sie mit Drillingen niederkäme, wovon eines ein Knäbchen und die beiden andern Mädchen wären, was würde dann jedes von den 7140 fl. erhalten? Antw. Die Mutter 1785, der Sohn 3570, jede Tochter $892\frac{1}{2}$ fl.

Zweite Aufgabe.

Jemand hat drei Stücke Metall, von denen jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer, das zweite 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer, das dritte 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Wie viele Lothe muß er von jedem dieser drei Stücke nehmen, um eine Mischung, die 10 Loth Gold, 23 Loth Silber, und 26 Loth Kupfer enthält, zu bekommen?

Auf-

Auflösung.

Es hat zwar das erste Stück am Gewicht 50 Loth, das zweite 96 Loth, das dritte 75 Loth. Allein der Bequemlichkeit der Rechnung wegen werde einstweilen angenommen, das Gewicht iedes Stücks sey = 1, und x, y und z, als die gesuchten Werthe, sollen sich in Theilen dieses als 1 angenommenen Gewichts finden lassen, so kann man alsdann in der Folge durch Anwendung der blosen Regel de Tri, diese Werthe von x, y, und z auf die gehörigen Menge Lothe reduciren.

Dieß vorausgesezt, so kann man nun um die Gleichungen herzuleiten, so verfahren. Man sage, da das erste Stück 5 Loth Gold enthält, wie viele Lothe Gold enthält der Theil x, oder

$$1 : x = 5 : 5x$$

so ist 5x Lothe, die Menge Golds, die in dem Theil x des ersten Stücks enthalten ist.

Ferner, da das zweite Stück 20 Loth Gold enthält, wie viele Lothe Gold enthält der Theil y dieses zweiten Stücks, d. i.

$$1 : y = 20 : 20y$$

so ist 20y Lothe die Menge Golds, die in dem Theil y des zweiten Stücks enthalten ist. Eben so bei dem dritten Stück

$$1 : z \quad 12 : 12z$$

Weil nun die Mischung 10 Loth Gold enthalten soll, so muß die Menge Goldes die in x, y und

und z zusammen enthalten ist, 10 Loth betragen. Daher hat man die Gleichung:

$$\text{N. 1)}\quad 5x + 20y + 12z = 10$$

So verfahre man auf ähnliche Art mit der Menge Silber, die in x, y und z enthalten seyn soll, so erhält man

$$\text{N. 2)}\quad 15x + 28y + 39z = 23$$

Endlich auch so in Rücksicht des Kupfers, so erhält man $30x + 48y + 24z = 26$

Da sich diese lezte Gleichung mit 2 dividiren läßt, so hat man

$$\text{N. 3)}\quad 15x + 24y + 12z = 13$$

Aus diesen drei Gleichungen müßen nun die unbekannten Größen entwickelt werden.

Erste Art der Auflösung.

Aus der Gleichung N. 1) folgt daß $x = \frac{10 - 20y - 12z}{5}$

Aus der Gleichung N. 2) $x = \frac{23 - 28y - 39z}{15}$

Aus der Gleichung N. 3) $x = \frac{13 - 24y - 12z}{15}$

Folglich ist erstens

$$\frac{10 - 20y - 12z}{5} = \frac{23 - 28y - 39z}{15}$$

also $30 - 60y - 36z = 23 - 28y - 39z$

daher $30 - 23 + 39z - 36z = 60y - 28y$

folglich $7 + 3z = 32y$

und $\frac{7 + 3z}{32} = y$

Dann

Dann ist auch zweitens

$$\frac{10 - 20y - 12z}{5} = \frac{13 - 24y - 12z}{15}$$

also $30 - 60y - 36z = 13 - 24y - 12z$

daher $30 - 13 + 12z - 36z = 60y - 24y$

folglich $17 - 24z = 36y$

und $\frac{17 - 24z}{36} = y.$

Nun setze man die beiden Werthe von y einander gleich, so ergiebt sich

$$\frac{7 + 3z}{32} = \frac{17 - 24z}{36}$$

also $252 + 108z = 544 - 768z$

daher $768z + 108z = 544 - 252$

oder $876z = 292$

d. i. $219z = 73$

also $z = \frac{73}{219}$ oder $= \frac{1}{3}$

Da nun $y = \frac{7 + 3z}{32}$, so ist $y = \frac{8}{32}$ d. i. $y = \frac{1}{4}$.

Da ferner $x = \frac{10 - 20y - 12z}{5}$, so ist $x = \frac{10 - 20.\frac{1}{4} - 12.\frac{1}{3}}{5}$ oder $x = \frac{10 - 5 - 4}{5}$ das ist $x = \frac{1}{5}$.

Diese Werthe $\frac{1}{5}$ für x, $\frac{1}{4}$ für y und $\frac{1}{3}$ für z gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Masse iedes der drei Stücke = 1. Das heißt: x ist der fünfte Theil des ersten Stücks, y der vierte Theil des zweiten, und z der dritte Theil des

des dritten. Weil nun aber das erste Stück eigentlich 50 Loth wiegt, so ist $x = 10$ Loth und da das zweite Stück 96 Loth wiegt, so ist $y = 24$ Loth, und da das dritte Stück 75 Loth wiegt, so ist $z = 25$ Loth.

Zweite Art der Auflösung.

Die drei Gleichungen sind

$$\text{N. 1)}\quad 5x + 20y + 12z = 10$$
$$\text{N. 2)}\quad 15x + 28y + 39z = 23$$
$$\text{N. 3)}\quad 15x + 24y + 12z = 13$$

Nun sieht man leicht, daß wenn man die Gleichung N. 1. mit 3 multiplicirt, und N. 2. davon subtrahirt, die Größe x wegfällt. Also multiplicire man N. 1. mit 3, so giebt dieß

$$15x + 60y + 36z = 30$$
$$\text{ab}\quad 15x + 28y + 39z = 23$$
$$\text{Erster Rest}\quad 32y - 3z = 7$$

Hierauf subtrahire man auch N. 3. von dem mit 3 multiplicirten N. 1.

$$15x + 60y + 36z = 30$$
$$\text{ab}\quad 15x + 24y + 12z = 13$$
$$\text{Zweiter Rest}\quad 36y + 24z = 17$$

Vergleicht man nun den ersten Rest mit dem zweiten, so bemerkt man, daß wenn man den ersten Rest mit 8 multiplicirt, und den zweiten zu dem Product addirt, die Größe z sich hebt.

Nemlich

Nemlich $256y - 24z = 56$
dazu addirt $36y + 24z = 17$

Summe $292y = 73$
also $y = \frac{73}{292}$ oder $y = \frac{1}{4}$

Ferner entwickle man z aus dem ersten oder zweiten Rest.

Nemlich der erste Rest ist $32y - 3z = 7$
daher $\frac{32y - 7}{3} = z$

Da nun $y = \frac{1}{4}$, so ist $z = \frac{8 - 7}{3}$ oder $= \frac{1}{3}$.

Endlich nehme man eine von den ersten drei Gleichungen, z. B. die erste

$$5x + 20y + 12z = 10$$

so ist $x = \frac{10 - 20y - 12z}{5}$

oder, wenn man die Werthe von y und z substituirt $x = \frac{10 - 20.\frac{1}{4} - 12.\frac{1}{3}}{5}$

d. i. $x = \frac{10 - 5 - 4}{5}$ oder $x = \frac{1}{5}$.

Weil nun das erste Stück 50 Loth wiegt, so ist $x = 10$ Loth, da das zweite Stück 96 Loth wiegt, so ist $y = 24$ Loth und da das dritte Stück 75 Loth wiegt, so ist $z = 25$ Loth.

Probe.

10 L. v. 1 St. enth. 1 L. G. 3 L. S. 6 L. K.
24 L. v. 2 St. enth. 5 L. G. 7 L. S. 12 L. K.
25 L. v. 3 St. enth. 4 L. G. 13 L. S. 8 L. K.

Also die Mischung 10 L. G. 23 L. S. 26 L. K.

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

84) Jemand schließt einen Accord für dreierlei Getreidearten ab, vermöge dessen ihm das Simra ieder Getreideart für einen im Vergleich festgesetzten Preis geliefert wird. Damit füllt er drei Magazine. Das erste enthält 16 Simra Weizen, 6 Simra Rocken und 10 Simra Gerste; das zweite 6 Simra Weizen, 20 Simra Rocken und 14 Simra Gerste; das dritte 12 Simra Weizen, 18 Simra Rocken und 26 Simra Gerste. Der Werth des ersten Magazins ist 734 fl., des zweiten 812 fl., und des dritten 1130 fl. Wie theuer wurde dem Accord gemäß das Simra ieder Getreideart geliefert? Antw. Das Simra Weizen um 28 fl., das Simra Rocken um 21 fl. und das Simra Gerste um 16 fl.

85) Drei Personen machen mit einander einen Einkauf von Kaffee, Zucker und Thee. Der erste kauft 10 ℔ Kaffee, 7 ℔ Zucker und 1 ℔ Thee, und zahlt dafür 16 fl. Der zweite zahlt für 6 ℔ Kaffee, 3 ℔ Zucker und 2 ℔ Thee, 14 fl. 12 Kr. Der dritte für $12\frac{1}{2}$ ℔ Kaffee, 8 ℔ Zucker und $\frac{1}{2}$ ℔ Thee, 16 fl. 42 Kr. Was kostet das ℔ von ieder Gattung? Antw. Das ℔ Kaffee 48 Kr. Das ℔ Zucker 36 Kr., und das ℔ Thee 3 fl. 48 Kr.

Dritte Aufgabe.

Es hat iemand drei Stücke Silber, 15löthiges, 10löthiges und 9löthiges. Schmelzt er das

15löthige und 10löthige zusammen, so ist der Gehalt der Mischung $11\frac{2}{3}$löthig, und von dem nehmlichen Gehalt ist sie auch, wenn er das 15löthige und 9löthige zusammen schmelzt. Alle drei Stücke wiegen zusammen 34 Mark. Wie viele Mark wiegt iedes Stück?

Auflösung.

Es wiege das erste Stück x Mark, das zweite y Mark, das dritte z Mark.

	Mark.		Mark.		L.f.S.		L.f.S.
Nun verhält sich	1	:	x	=	15	:	15x
und	1	:	y	=	10	:	10y

Wird 15x und 10y addirt, so deutet die Summe die Menge Lothe des feinen Silbers an, die in den x und y Mark zusammen enthalten sind. Will man nun berechnen wie viele Lothe in einer Mark enthalten sind, so schließe man

Mark. Mark. Lothe f. S.

$x + y : 1 = 15x + 10y$: der gesuchten Anzahl Lothe f. S. in einer Mark, so ist nach der Regel de Tri $\frac{15x + 10y}{x + y}$ = der gesuchten Anzahl L. f. S. in einer Mark. Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die Mischung $11\frac{2}{3}$löthig ist, so hat man die Gleichung

$$\text{N. 1)} \quad \frac{15x + 10y}{x + y} = 11\frac{2}{3}$$

Es verhält sich aber ferner

Mk.		Mk.		L.f.S.		L.f.S.
1	:	z	=	9	:	9z

$15x + 9z$ ist also das feine Silber in $x + z$ Mark,

nun

$$\text{nun verhält sich } \overset{\text{Mk.}}{x + z} : \overset{\text{Mk.}}{1} = \overset{\text{Lothe f. S.}}{15x + 9z} : \frac{15x + 9z}{x + z}$$

und da der Gehalt dieser Mischung, wie der vorige ist, so hat man die zweite Gleichung:

$$\text{N. 2)} \quad \frac{15x + 9z}{x + z} = 11\tfrac{2}{3}$$

Endlich, da die drei Stücke zusammen 34 Mark wiegen, so ergiebt sich die dritte Gleichung:

$$\text{N. 3)} \quad x + y + z = 34$$

Hierauf nehme man die Gleichung N. 1) und entwickle den Werth von y.

Nemlich da $\frac{15x + 10y}{x + y} = 11\frac{2}{3}$

so ist $15x + 10y = 11\frac{2}{3}x + 11\frac{2}{3}y$

daher $45x + 30y = 35x + 35y$

folglich $45x - 35x = 35y - 30y$

oder $10x = 5y$

also $2x = y$

Ferner nehme man die Gleichung N. 2) und entwickle den Werth von z.

Nemlich $\frac{15x + 9z}{x + z} = 11\frac{2}{3}$

also $15x + 9z = 11\frac{2}{3}x + 11\frac{2}{3}z$

daher $45x + 27z = 35x + 35z$

folglich $45x - 35x = 35z - 27z$

d. i. $10x = 8z$

oder $5x = 4z$

also $\frac{5x}{4} = z.$

Endlich nehme man die Gleichung N. 3) und substituire in ihr für y und z die eben gefundenen Werthe, so erhält man

$$x + 2x + \frac{5x}{4} = 34$$

folglich $17x = 136$

also $x = 8$

da nun $y = 2x$, so ist $y = 16$.

und da $z = \frac{5x}{4}$, so ist $z = 10$.

Probe.

Erstens ist $8 + 16 + 10 = 34$. Zweitens, da das erste Stück 15löthig ist, und 8 Mark wiegt, so enthält es 120 Loth f. S. und da das zweite Stück 10löthig ist und 16 Mark wiegt, so enthält dieses 160 Loth f. S., werden sie also zusammen geschmolzen, so wiegt die Mischung 24 Mark, und enthält 280 Loth f. S. also eine Mark $11\frac{2}{3}$ Loth f. S. Da nun das dritte Stück 9löthig ist, und 10 Mark wiegt, so enthält es 90 Loth f. S. Wird es also mit dem ersten Stück zusammen geschmolzen, so wiegt die Mischung 18 Mark und enthält 210 Loth f. S., also eine Mark gleichfalls $11\frac{2}{3}$ Loth f. S.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

86) Jemand hat drei Stücke Silber, 14l. 11l. und 10l. Schmelzt er das 14löthige und 11löthige zusammen, so ist der Gehalt der Mischung $12\frac{2}{7}$löthig, schmelzt er aber das 14löthige und 10löthige zusammen, so ist die Mischung $11\frac{1}{7}$ löthig.

löthig. Die drei Stücke wiegen zusammen 14 Mark. Wie viele Mark wiegt iedes Stück? Antw. Das erste 3 Mark, das zweite 4 Mark, und das dritte 7 Mark.

Vierte Aufgabe.

Drei Regimenter werden zu einer gewissen Arbeit angewendet. Das erste und zweite Regiment hat gemeinschäftlich eine solche Arbeit in 70 Tagen, das erste und dritte in 84 Tagen und das zweite und dritte in 140 Tagen verrichtet. Nun ist die Frage, in wie viel Tagen die drei Regimenter zusammen diese Arbeit verfertigen werden, und wie viele Tage iedes für sich brauchen würde, diese Arbeit zu vollenden?

Auflösung.

Man betrachte die Arbeit überhaupt als ein Ganzes, und setze solches = 1.

Es sey nun w die gesuchte Anzahl Tage, welche die drei Regimenter, wenn sie zusammen arbeiten, brauchen.

Ferner sey x der Theil der Arbeit, den das erste Regiment allein in einem Tag verfertigen würde, y der Theil der Arbeit, den das zweite Regiment allein in einem Tag verfertigen würde, z der Theil der Arbeit, den das dritte Regiment allein in einem Tag verfertigen würde.

Es ist klar, daß wenn x, y und z bekannt wären, sich w durch einen Proportionalsatz fin-

den ließe. Denn es verhält sich $x + y + z$ zu der ganzen Arbeit 1, wie 1 Tag zu w Tagen,

$$\text{also ist } \frac{1}{x+y+z} = w$$

Die Werthe x, y und z lassen sich aber auf folgende Art finden.

Da das erste und zweite Regiment gemeinschäftlich in 70 Tagen die Arbeit verfertigen würde, so verfertigen sie in einem Tag $\frac{1}{70}$ dieser Arbeit, also ist $x + y = \frac{1}{70}$.

Da das erste und dritte Regiment gemeinschäftlich in 84 Tagen die Arbeit verfertigen würde, so verfertigen sie in einem Tag $\frac{1}{84}$ dieser Arbeit, also ist $x + z = \frac{1}{84}$.

Da das zweite und dritte Regiment gemeinschäftlich in 140 Tagen die Arbeit verfertigen würde, so verfertigen sie in einem Tag $\frac{1}{140}$ dieser Arbeit, also ist $y + z = \frac{1}{140}$.

Nun subtrahire man von $x + y = \frac{1}{70}$
die Gleichung $z + y = \frac{1}{140}$

so ist der Rest $x - z = \frac{1}{140}$
dazu addirt $x + z = \frac{1}{84}$

so ist $2x = \frac{2}{105}$
folglich $x = \frac{1}{105}$

Da nun $x + y = \frac{1}{70}$ so ist $y = \frac{1}{70} - x$ oder $y = \frac{1}{70} - \frac{1}{105}$ d. i. $y = \frac{1}{210}$. Und

da

da $y + z = \frac{1}{140}$, so ist $z = \frac{1}{140} - y$ oder $z = \frac{1}{140} - \frac{1}{210}$ d. i. $z = \frac{1}{420}$.

Da ferner nach dem obigen $\frac{1}{x + y + z} = w$

so ist $$\frac{1}{\frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{420}} = w$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Benennung, so beträgt ihre Summe $\frac{1}{60}$.

also ist $\frac{1}{\frac{1}{60}} = w$

d. i. $60 = w$

Da das erste Regiment in einem Tag $\frac{1}{105}$, das zweite $\frac{1}{210}$, und das dritte $\frac{1}{420}$ der Arbeit verfertigt, so vollendet das erste die ganze Arbeit in 105 Tagen, das zweite Regiment in 210 Tagen, das dritte in 420 Tagen.

Probe.

Weil das erste Regiment die Arbeit in 105 Tagen, also in einem Tag $\frac{1}{105}$ derselben verfertigt, und das zweite Regiment in 210 Tagen, also in einem Tag $\frac{1}{210}$ derselben, so verfertigen das erste und zweite Regiment gemeinschäftlich in einem Tag $\frac{1}{105} + \frac{1}{210}$ d. i. $\frac{3}{210}$ oder $\frac{1}{70}$ derselben, folglich die ganze Arbeit in 70 Tagen, u. s. f.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

87) Ein Bassin kann von drei Röhren gefüllt werden. Wenn die erste und zweite Röhre mit einander laufen, so füllen sie es in 12 Stun-

den; lauft die erste mit der dritten, so wird es in 15 Stunden gefüllt; läßt man aber die zweite mit der dritten laufen, so füllen solche es in 20 Stunden. Die Frage ist, in wie viel Stunden das Bassin voll wird, wenn die drei Röhren mit einander laufen, und dann wie viel Zeit erfordert wird, bis iede Röhre einzeln das Bassin füllt. Antw. In 10 Stunden. Ferner braucht die erste Röhre 20 Stunden, die zweite 30 und die dritte 60 Stunden.

Fünfter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben, welche blos auf Zahlengleichungen vom ersten Grad führen.

§. 1.

Es ist schon gezeigt worden, daß unbestimmte Aufgaben solche sind, aus denen sich nicht so viele Gleichungen ableiten lassen, als unbekannte Grössen vorkommen, und bei denen also für iede unbekannte Grösse mehr als ein einziger Werth statt findet. Z. B. zwei Zahlen zu finden, die mit einander multiplicirt zum Product 360 geben.

Es sey die eine Zahl $= x$, die andere $= y$, so ist nach der Bedingung der Aufgabe

$$xy = 360$$

Dieses

Dieses ist die einzige Gleichung, die sich aus dieser Aufgabe herleiten läßt, ob gleich zwei unbekannte Größen x und y gesucht werden. Folglich finden mehrere Werthe für x und y statt.

Denn wenn $xy = 360$

so ist $y = \frac{360}{x}$

So wie man nun für x eine andere Zahl annimmt, so erscheint auch ein anderer Werth für y. Es werde z. B. $x = 2$ angenommen, so findet sich $y = 180$; wird $x = 3$ angenommen, so ist $y = 120$, für $x = 4$ ist $y = 90$, für $x = 5$ ist $y = 72$, für $x = 6$ ist $y = 60$, für $x = 8$ ist $y = 45$, für $x = 9$ ist $y = 40$, für $x = 10$ ist $y = 36$, für $x = 12$ ist $y = 30$, für $x = 15$ ist $y = 24$, für $x = 18$ ist $y = 20$. Wollte man nun für x auch Brüche, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ u. s. f. oder gemischte Zahlen, z. B. $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $6\frac{5}{8}$ annehmen, so würde die Menge der Werthe von y noch größer werden.

§. 2. Bei der Auflösung der Gleichungen, die aus den unbestimmten Aufgaben hergeleitet werden können, muß man darauf sehen, die Werthe der unbekannten Größen in ganzen Zahlen, und zwar in lauter positiven Zahlen, zu erhalten, wenn solches möglich ist.

§. 3. Wenn nemlich eine Gleichung folgende Beschaffenheit hat, wie diese:

$$6y = 5x + 49$$

so

so daß nemlich die Coefficienten von x und y (hier 5 und 6) keinen gemeinschäftlichen Theiler haben, so lassen sich die Werthe von x und y in ganzen Zahlen finden.

Denn wenn $6y = 5x + 49$
so ist $y = \frac{5x + 49}{6}$

oder wenn man wirklich dividirt,

$$y = \frac{5x}{6} + 8 + \frac{1}{6}$$

soll nun y eine ganze Zahl werden, wenn man für x eine gewisse ganze Zahl annimmt, so darf man blos darauf sehen, daß $\frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$ eine ganze Zahl wird. Denn ist dieses, und man addirt 8 dazu, so hat man y als ganze Zahl gefunden.

Um x durch eine solche ganze Zahl zu bestimmen, daß $\frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$ eine ganze Zahl wird, darf man nur überlegen, daß $\frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$ so viel ist als $\frac{5x + 1}{6}$.

Man setze nun, w bedeute eine ganze Zahl, und es sey $\frac{5x + 1}{6} = w$
so ist $5x + 1 = 6w$
also $x = \frac{6w - 1}{5}$

Man dividire wirklich, so ist $x = w + \frac{w}{5} - \frac{1}{5}$.

Man nehme wieder die Brüche $\frac{w}{5} - \frac{1}{5}$ besonders. Es ist klar, daß sie so viel sind, als $\frac{w - 1}{5}$. Diesen Ausdruck setze man der ganzen Zahl u gleich, oder es sey

$$\frac{w - 1}{5} = u$$

so ist $w = 5u + 1$.

Da

Da bei $5u + 1$ kein Divisor mehr vorhanden ist, so wird, wenn man für u eine beliebige ganze Zahl substituirt, auch w eine ganze Zahl werden. Man nehme also irgend eine ganze Zahl, wobei man von 0 anfangen, dann zu 1 ferner zu 2 und so weiter fortgehen kann. Also, gesetzt man nehme 0 an, so substituire man solches in den Ausdruck $5u + 1$ für u, so hat man $w = 5\text{mal}\ 0 + 1$ d. i. $w = 1$.

Dann gehe man zur Gleichung $x = \frac{6w - 1}{5}$ und substituire für w dieses gefundene 1, so ist $x = \frac{6 - 1}{5}$ d. i. $x = 1$. Endlich substituire man diesen für x gefundenen Werth in der Gleichung $y = \frac{5x + 49}{6}$ statt x, so hat man $y = \frac{5 + 49}{6}$ oder $y = 9$.

Also sind die beiden Werthe von x und y als ganze Zahlen gefunden worden, nemlich $x = 1$ und $y = 9$.

Nun nehme man wieder die letzte Gleichung $w = 5u + 1$, und setze in ihr 1 statt u ein, so ist $w = 6$. Diesen Werth von w substituire man in der Gleichung $x = \frac{6w - 1}{5}$, so ist $x = \frac{36 - 1}{5}$ oder $x = 7$. Diesen Werth von x substituire man in der Gleichung $y = \frac{5x + 49}{6}$, so ist $y = \frac{35 + 49}{6}$ so ist $y = 14$. Also hat man wieder zwei Werthe von x und y in ganzen Zahlen gefunden, nemlich $x = 7$ und $y = 14$.

So kann man ferner verfahren. Man nehme nehmlich für u die Zahl 2 an, kehre zur letzten Gleichung $w = 5u + 1$ zurück, und substituire

stituire in ihr 2 statt u, so hat man $w = 11$, und so ferner. So findet man wieder zwei Werthe von x und y in ganzen Zahlen, nemlich $x = 13$ und $y = 19$.

Wenn man so fortfahren wollte, so könnte man noch mehrere Werthe von x und y in ganzen Zahlen finden, allein es sind die gefundenen schon hinreichend, um das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Zahlen x und y wachsen.

Wenn man nemlich die gefundenen Werthe von x zusammenstellt, so sind solche 1, 7 und 13 die gefundenen Werthe, von y aber sind 9, 14 und 19. Man sieht also daß die Werthe von x immer um 6 zunehmen, und die von y um 5, und daß die folgenden Werthe von x, 19, 25, 31, 37 u. s. f. die correspondirenden Werthe, von y aber 24, 29, 34, 39 u. s. f. seyn werden.

§. 4. Ist aber eine Gleichung so beschaffen wie diese: $4x + 49 = 6y$
daß nehmlich die Coefficienten von x und y, (hier 4 und 6) sich durch irgend eine ganze Zahl ohne Rest theilen lassen, (hier durch 2) die dritte Zahl der Gleichung aber sich nicht durch eben diese ganze Zahl theilen läßt, so können x und y nicht zugleich ganze Zahlen seyn.

Denn man dividire mit dem gemeinschäftlichen Theiler (hier mit 2) die Gleichung, so erhält man $2x + 24\frac{1}{2} = 3y$

Es sey nun x eine ganze Zahl, so ist 2x auch eine ganze Zahl. Ferner sey y eine ganze

Zahl,

Zahl, so ist 3 y auch eine ganze Zahl. Also, da $2x + 24\frac{1}{2} = 3y$, und 3 y eine ganze Zahl ist, so wäre $2x + 24\frac{1}{2}$ eine ganze Zahl, welches unmöglich ist, wenn 2 x eine ganze Zahl ist. Denn die Summe einer ganzen und gemischten Zahl kann nie eine ganze Zahl werden.

In diesem Fall kann also nur eine der beiden unbekannten Größen eine ganze Zahl seyn, die andere wird ein Bruch oder eine gemischte Zahl seyn.

§. 5. Daraus erhellt, daß sich nicht bei allen unbestimmten Aufgaben ganze Zahlen für die unbekannten Größen finden lassen. Ist nun die Aufgabe von der Art, daß man auch Brüche und gemischte Zahlen brauchen kann, wie bei der Vermischungsrechnung, so sucht man diese. Ist sie aber von der Art, daß man für die Resultate keine Bruchzahlen nützen kann, wie bei solchen, wo eine gewisse Anzahl Personen, oder eine Anzahl Geldstücke gesucht wird, so ist die Aufgabe als praktisch-unmöglich anzusehen, wenn sich die in ihr vorkommenden unbekannten Größen nicht in ganzen Zahlen finden lassen.

§. 6. Auch giebt es unbestimmte Aufgaben von der Art, daß sich nur wenige Werthe für die unbekannten Größen in ganzen und positiven Zahlen finden lassen, ja manchmal nur ein einziger Werth für jede der unbekannten Größen in ganzen positiven Zahlen.

§. 7.

§. 7. Noch ist zu bemerken, daß wenn ein Ausdruck von dieser Form $\frac{3-2x}{5}$ vorkommt, er einen negativen Werth geben wird, wenn er eine ganze Zahl bedeuten soll. Denn es sey $x = 4$, so ist $2x = 8$, folglich größer als 3, von dem es subtrahirt werden soll, also müßte 3 von 8 subtrahirt, und der Rest als negativ angesehen werden. (§. 16. und §. 23. des dritten Abschnitts) dieser negative Rest durch 5 dividirt, giebt ein negatives 1 oder -1. Es sey also überhaupt $\frac{3-2x}{5} = -w$, so ist $3 - 2x = -5w$, also $3 = 2x - 5w$, ferner $3 + 5w = 2x$, daher $5w = 2x - 3$, und endlich $w = \frac{2x-3}{5}$. Das heißt, man darf $3 - 2x$ nur umkehren, und $2x - 3$ schreiben, und darunter 5 als Divisor oder Nenner setzen, so wird der Ausdruck positiv, d. h. $= w$ und nicht mehr $= -w$, weil sich nun, wenn $x = 4$ ist, das 3 von $2x$ oder 8 subtrahiren läßt.

Erste Aufgabe.

Es sollen 110 fl. in Laubthalern und Preußischen Thalern, den Laubthaler zu 2 fl. 45 Kr. und den Preußischen Thaler zu 1 fl. 39 Kr. gerechnet, bezahlt werden. Wie viele Stücke von jeder Sorte werden erfordert?

Auflösung.

Die Anzahl der Laubthaler sey $= x$
Die der Preußischen Thaler $= y$

Da

Da ein Laubthaler zu 165 Kreutzern, und ein Preußischer Thaler zu 99 Kr. gerechnet ist, so sind x Laubthaler 165x Kr., und y Preußische Thaler 99y Kr. werth, 110fl. aber betragen 6600 Kreutzer, also ergiebt sich die Gleichung

$$165x + 99y = 6600$$

Da nun in der Aufgabe keine Bedingung mehr enthalten ist, aus der noch eine Gleichung hergeleitet werden könnte, so ist es eine unbestimmte Aufgabe, weil sie zwei unbekannte Größen enthält, aber nur eine einzige Gleichung aus ihr hergeleitet werden kann. Man nehme nun die Gleichung $165x + 99y = 6600$ und da sie sich mit 33 dividiren läßt, so erhält man $5x + 3y = 200$

Da nun die Coefficienten 5 und 3 der unbekannten Größen x und y keinen gemeinschäftlichen Theiler haben, so lassen sich für x und y Werthe in ganzen Zahlen finden. (§. 3. u. §. 4.)

Nemlich es ist $3y = 200 - 5x$

also $y = \frac{200 - 5x}{3}$

oder $y = 66 + \frac{2}{3} - x - \frac{2x}{3}$

Man nehme die Brüche $\frac{2}{3} - \frac{2x}{3}$ oder $\frac{2 - 2x}{3}$ besonders, und um einen positiven Werth zu erhalten, schreibe man $\frac{2x - 2}{3}$, (§. 7.) und setze diesen Ausdruck einer ganzen Zahl w gleich,

oder $\frac{2x - 2}{3} = w$

so ist $2x - 2 = 3w$

und $x = \frac{3w + 2}{2}$

oder $x = w + \frac{w}{2} + 1.$

Man

Man nehme den Bruch $\frac{w}{2}$ wieder besonders, und setze ihn einer ganzen Zahl u gleich,

d. i. $\frac{w}{2} = u$, so ist $w = 2u$

Da nun kein Divisor in dieser letztern Gleichung vorhanden ist, so nehme man für u willkührliche ganze Zahlen an, wobei man von den kleinsten anfangen kann. Es sey nehmlich $u = 1$, so ist $w = 2$, weil es $= 2u$.

Diesen Werth 2 von w substituire man in der Gleichung $x = \frac{3w + 2}{2}$

so ist $x = \frac{6 + 2}{2}$ oder $= 4$

diesen Werth 4 von x substituire man in der Gleichung $y = \frac{200 - 5x}{3}$

so ist $y = \frac{200 - 20}{3}$ oder $y = 60$.

Also hat man für x und y die ersten Werthe in ganzen Zahlen. Es werden nehmlich 4 Stück Laubthaler und 60 Preußische Thaler erfordert.

Um nun das zweite Paar Werthe für x und y zu finden, sey $u = 2$, so ist $w = 4$, diesen Werth von w substituirt in $x = \frac{3w + 2}{2}$ giebt $x = \frac{12 + 2}{2}$ oder $x = 7$ und diesen Werth 7 von x substituirt in $y = \frac{200 - 5x}{3}$ giebt $y = \frac{200 - 35}{3}$ oder $y = 55$. Dieß sind die zweiten Werthe für x und y in ganzen Zahlen. Man kann nehmlich auch 7 Stück Laubthaler und 55 Preußische Thaler nehmen.

Um das dritte Paar Werthe für x und y zu finden, sey $u = 3$, so ist $w = 6$, und $x = 10$,

ferner

ferner y = 50. Das heißt, man kann auch 10 Laubthaler und 50 Preußische Thaler nehmen.

Um nun auch die übrigen möglichen Werthe von x und y in ganzen Zahlen auf eine leichte Art zu finden, vergleiche man die drei gefundenen Werthe von x, diese sind 4, 7, und 10, die um 3 wachsen. Eben so vergleiche man die gefundenen Werthe von y, diese sind 60, 55 und 50, so sieht man, daß sie um 5 abnehmen. Folglich darf man nur zum leztern gefundenen Werth von x die Zahl 3 addiren, so hat man den folgenden, und so bei y von den leztern gefundenen Werth 5 subtrahiren, um den folgenden zu finden. Daraus entsteht folgende Tabelle, die alle möglichen Werthe von x und y in ganzen Zahlen enthält.

x = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37

y = 60, 55, 50, 45, 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5

Diese Tabelle zeigt, daß zwölf Arten möglich sind, wie 110 fl. in Laubthalern und Preußischen Thalern, nach dem in der Aufgabe angegebenen Werth bezahlt werden können.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

88) Es sollen 100 fl. in Sechsbäznern und Preußischen Thalern bezahlt werden, den Sechsbäzner zu 24 Kr. und den Preußischen Thaler zu 1 fl. 41 Kr. gerechnet. Wie viele Stücke werden von ieder Sorte erfordert? Antw. Entweder 24 Preuß. Thaler und 149 Sechsbäzner, oder 48 Preuß. Thaler und 48 Sechsbäzner.

Zweite Aufgabe.

Eine Innung dingt eine Mahlzeit für 182 fl. an, wobei ein Meister 1 fl. 36 Kr. und ein Geselle 49 Kr. bezahlt. Wie viele Meister und Gesellen waren es?

Die Anzahl der Meister sey $= x$

Die Anzahl der Gesellen sey $= y$

so ist $96x + 49y = 10920$

also $y = \frac{10920 - 96x}{49}$

oder $y = 222 + \frac{42}{49} - x - \frac{47}{49}x$

Man nehme die Brüche besonders, nemlich $\frac{42 - 47x}{49}$ und setze (§. 7.) $\frac{47x - 42}{49} = w$

so ist $x = \frac{49w + 42}{47}$

oder $x = w + \frac{2w}{47} + \frac{42}{47}$

Es sey $\frac{2w + 42}{47} = u$

so ist $w = \frac{47u - 42}{2}$

oder $w = 23 + \frac{u}{2} - 21$

Es sey $\frac{u}{2} = t$, so ist $u = 2t$

Nun kann man für t beliebige ganze Zahlen annehmen.

Es sey also $t = 1$, so ist $u = 2$, folglich $w = \frac{94 - 42}{2}$ oder $= 26$, ferner $x = \frac{1274 + 42}{47}$ oder $x = 28$, und $y = \frac{10920 - 2688}{49}$, d. i. $y = 168$.

Es

Es sey ferner $t = 2$, so ist $u = 4$, und nach gehöriger Substitution und Berechnung findet man ferner $w = 73$, $x = 77$ und $y = 72$.

Wollte man hierauf t als 3 annehmen, so wird die Rechnung zeigen, daß y negativ werden würde. Nemlich y ist $= \frac{10920 - 96x}{49}$, wenn also x so groß ist, daß 96x mehr betragen als 10920, so wird der Rest negativ, und giebt also, mit 49 dividirt, für y einen negativen Werth, der hier nicht gebraucht werden kann.

Folglich finden für diese Aufgabe nur zwey Werthe für iede unbekannte Größe in ganzen positiven Zahlen statt. Es waren nemlich entweder 28 Meister und 168 Gesellen, oder 77 Meister und 72 Gesellen.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

89) Eine Gesellschaft von Herren und Frauenzimmern verzehrten zusammen 104 fl., ein Herr bezahlte für sich 5 fl. und für ein Frauenzimmer 3 fl., wie viele Herrn und Frauenzimmer waren es? Antw. Entweder 4 Herrn und 28 Frauenzimmer, oder 7 H. und 23 F. oder 10 H. und 18 F. oder 13 H. und 13 F. oder 16 H. und 8 F. oder 19 H. und 3 F.

90) Zu einer Mahlzeit, welche eine Innung für 117 fl. hält, trägt ein Meister 1 fl. 36 Kr. und ein Geselle 45 Kr. bei, wie viele Meister und Gesellen nehmen daran Theil? Antw. Entweder

15 Meister und 124 Gesellen, oder 30 M. und 92 G. oder 45 M. und 60 G. oder 60 Meister und 28 Gesellen.

Dritte Aufgabe.

Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen, zusammen für 4200 fl., und bezahlt für ein Pferd 120 fl. und für einen Ochsen 81 fl. Wie viele Stücke von ieder Art hat er eingekauft?

Auflösung.

Die Anzahl der Pferde sey $= x$, der Ochsen $= y$

so ist $120x + 81y = 4200$

oder $40x + 27y = 1400$

also $y = \frac{1400 - 40x}{27}$

oder $y = 51 + \frac{23}{27} - x - \frac{13x}{27}$

Es sey $\frac{13x - 23}{27} = w$, so ist $x = \frac{27w + 23}{13}$

oder $x = 2w + \frac{w}{13} + 1 + \frac{10}{13}$.

Es sey ferner $\frac{w + 10}{13} = u$, so ist $w = 13u - 10$.

Nun nehme man $u = 1$ an, so ist $w = 3$ und $x = 8$, ferner $y = 40$. Hierauf nehme man $u = 2$ an, so ist $w = 16$, und $x = 35$, aber y würde 0 werden. Denn es ist $y = \frac{1400 - 40x}{27}$. Ist nun $x = 35$, so ist $40x = 1400$, also $y = \frac{1400 - 1400}{27}$, d. i. $= 0$.

Bei dieser Aufgabe findet also für iede unbekannte Größe nur ein einziger Werth im ganzen

zen positiven Zahlen statt. Es waren nemlich 8 Pferde und 40 Ochsen.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

91) Ein Fleischer kaufte eine Anzahl Schweine und Schaafe, ein Schwein um 8 fl. 15 Kr. und ein Schaaf um 2 fl., und zahlte für alle Stücke zusammen 199 fl. Wie viele Schweine und Schaafe waren es? Antw. 4 Schweine und 83 Schaafe, oder 12 Schweine und 50 Schaafe, oder 20 Schweine und 17 Schaafe.

Vierte Aufgabe.

A will dem B 100 fl. bezahlen, hat aber blos Kronenthaler und B Preußische Thaler. Wie viele Stücke Kronenthaler wird A dem B zahlen, und wie viele Preußische Thaler wird B dem A herausgeben müßen, wenn der Kronenthaler 2 fl. 42 Kr. und der Preußische Thaler 1 fl. 38 Kr. gilt?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Kronenthaler $= x$ und die Anzahl der Preußischen Thalen $= y$

so ist $162x - 98y = 6000$

oder $81x - 49y = 3000$

also $x = \frac{3000 + 49y}{81}$

d. ist $x = 37 + \frac{3}{81} + \frac{49y}{81}$

Man setze $\frac{3+49y}{81} = w$

so ist $y = \frac{81w-3}{49}$

oder $y = w + \frac{32w}{49} - \frac{3}{49}$

Es sey ferner $\frac{32w-3}{49} = u$

so ist $w = \frac{49u+3}{32}$

oder $w = u + \frac{17u}{32} + \frac{3}{32}$

Nun setze man $\frac{17u+3}{32} = t$

so ist $u = \frac{32t-3}{17}$

oder $u = t + \frac{15t}{17} - \frac{3}{17}$

Ferner sey $\frac{15t-3}{17} = s$

so ist $t = \frac{17s+3}{15}$

oder $t = s + \frac{2s}{15} + \frac{3}{15}$

Es sey wiederum $\frac{2s+3}{15} = r$

so ist $s = \frac{15r-3}{2}$

oder $s = 7r + \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{2}$

Endlich sey $\frac{r-1}{2} = q$

so ist $r = 2q + 1.$

Nun nehme man an, q sey $= 0$, so ist $r = 1$, daraus findet sich $s = 6$, daraus $t = 7$, daraus $u = 13$, aus u findet man $w = 20$, daraus folgt $y = 33$ und endlich $x = 57$.

Nimmt man an, q sey $= 1$, so ist $r = 3$, $s = 21$, $t = 24$, $u = 45$, $w = 69$, $y = 114$ und $x = 106$. Wenn man weiter so fortfährt, so findet man für y, 195, 276, 357 u. s. f. und für x, 155, 204, 253 u. s. f. Man sieht

auch leicht, daß diese Werthe für x und y ins unendliche fortgehen, so daß die Werthe von y um die Differenz 81, und die von x um die Differenz 49 wachsen.

Um die verschiedenen Werthe besser übersehen zu können, ordne ich die erstern in folgende Tabelle.

x = 57, 106, 155, 204, 253 ... u. s. f. ins Unendliche.

y = 33, 114, 195, 276, 357 ... u. s. f. ins Unendliche.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

92) A soll an B 100 fl. zahlen, und hat blos Laubthaler, B nur Kronenthaler, wie viele Laubthaler muß A dem B geben, und wie viele Kronenthaler muß B dem A herausgeben, wenn der Laubthaler zu 2 fl. 45 Kr. und der Kronenthaler zu 2 fl. 42 Kr. gerechnet wird? Antwort. A giebt an B 56 Laubthaler und erhält 20 Kronenthaler, oder A giebt an B 110 Laubthaler, und erhält von B 75 Kronenthaler u. s. f. ins Unendliche, so daß die Menge der Laubthaler um 54, und die Menge der Kronenthaler um 55 zunimmt.

93) Wenn aber A an B 117 fl. 54 Kr. zu zahlen hätte, und A blos Laubthaler, B nur Kronenthaler hätte, wie viele Laubthaler müßte dann A dem B geben, und wie viele Kronenthaler hätte er von B zurück zu erhalten, wenn der Laubthaler 2 fl. 45 Kr. und der Kronenthaler 2 fl. 42 Kr. gilt?

gilt? Antw. A giebt an B 90 Laubthaler, und erhält 48 Kronenthaler, oder er giebt 144 Laubthaler und erhält 103 Kronenthaler u. s. f. ins Unendliche, so daß die Menge der Laubthaler um 54 und die der Kronenthaler um 55 zunimmt.

94) Wenn aber B dem A die 54 Kr. nachliese, und also A an B 117 fl. zu zahlen hätte, auch A wie vorhin blos Laubthaler, B nur Kronenthaler hätte, ferner der Werth eines Laubthalers und Kronenthalers der vorige bliebe, wie viele Laubthaler müßte A dem B geben, und wie viele Kronenthaler hätte er zu erhalten? Antw. A giebt dem B 72 Laubthaler und erhält 30 Kronenthaler, oder er giebt 126 Laubthaler und erhält 85 Kronenthaler u. s. f. ins Unendliche, so daß die Menge der Laubthaler um 54 und die der Kronenthaler um 55 zunimmt.

Fünfte Aufgabe.

Es sind 100 fl. in Laubthalern, Viertelskronenthalern und Preußischen Drittelsstücken bezahlt worden, und man bemerkte als etwas besonders, daß es in allem auch 100 Geldstücke waren, wie viele Stücke waren von jeder Sorte dabei? Man rechnete den Laubthaler zu 2 fl. 45 Kr. den Viertelskronenthaler zu 40 Kr. 2 H. und ein Preußisches Drittelstück zu 33 Kr.

Auflö-

Auflösung.

Es sey $x =$ der Anzahl der Laubthaler, $y =$ der Anzahl der Viertelskronenthaler, und $z =$ der Preußischen Drittelsstücke, so ist

N 1) $x + y + z = 100$

N. 2) $165x + 40\frac{1}{2}y + 33z = 6000$

oder $330x + 81y + 66z = 12000$

und wenn man mit 3 dividirt,

$$110x + 27y + 22z = 4000$$

Nun multiplicire man die Gleichung N. 1) mit 22, dem Coefficienten von z, in der letztern Gleichung, und subtrahire sie von dieser letztern, so erhält man eine, in der nur noch zwei unbekannte Größen sind. Nemlich die letztere Gleichung ist $110x + 27y + 22z = 4000$

davon subtrah. $22x + 22y + 22z = 2200$

Rest $88x + 5y = 1800$

Also $y = \frac{1800 - 88x}{5}$

oder $y = 360 - 17x - \frac{3}{5}x$

Es sey nun $\frac{3x}{5} = w$

so ist $x = \frac{5w}{3}$ oder $= w + \frac{2w}{3}$

Es sey ferner $\frac{2w}{3} = u$

so ist $w = \frac{3u}{2}$ oder $w = u + \frac{u}{2}$

Endlich sey $\frac{u}{2} = t$, so ist $u = 2t$.

Man nehme nun t als 1 an, so ist $u = 2$, $w = 3$, $x = 5$, $y = 272$, also y zu groß, da die Anzahl aller Stücke nur 100 betragen soll.

Folg-

Folglich nehme man t als 2 an, so ist $u = 4$, $w = 6$, $x = 10$, $y = 184$, also y noch zu groß.

Daher nehme man t als 3 an, so ist $u = 6$, $w = 9$, $x = 15$, $y = 96$. Nun wäre zwar y kleiner als 100, aber x und y zusammen betragen 111, also über 100, und folglich bleibt für z kein positiver Werth.

Man muß also t als 4 annehmen, so ist $u = 8$, $w = 12$, $x = 20$, $y = 8$. Und da nun $x + y + z = 100$, so ist $z = 100 - x - y$, d. i. $z = 100 - 20 - 8$ oder $z = 72$.

Wollte man ferner t als 5 annehmen, so würde man finden, daß schon y negativ werden würde.

Es findet also hier für jede unbekannte Größe nur ein einziger Werth statt. Es waren nemlich 20 Laubthaler, 8 Viertelskronenthaler, und 72 Preußische Drittelstücke.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

95) Es werden 100 fl. bezahlt in Laubthalern, Viertelskronenthalern, und Zwölfkreuzerstücken, den Laubthaler zu 2 fl. 45 Kr., den Viertelskronenthaler zu $40\frac{1}{2}$ Kr. gerechnet, und nun betragen auch die Geldsorten zusammen 100 Stück, wie viele Stücke von jeder Art waren dabey? Antw. 31 Laubthaler, 2 Viertelskronenthaler, und 67 Zwölfkreuzerstücke

96) Es sollen 100 fl. in Conventionsthalern, halben Laubthalern und Viertelskronenthalern bezahlt

zahlt werden. Der Schuldner verspricht sie in kurzen zu bezahlen, und macht sich dazu im Scherz erbötig, die Schuld in allem mit 100 Stücken abzutragen. Wie viel Stücke sind von ieder Sorte zu zahlen, wenn der Conventionsthaler zu 2 fl. 24 Kr. der halbe Laubthaler zu 1 fl. 22 Kr. 2 ℔ und der Viertelskronenthaler zu 40 Kr. 2 ℔ gerechnet wird? Antw. 16 Conventionsthaler, 7 halbe Laubthaler und 77 Viertelskronenthaler.

97) Jemand kauft dreierlei Sorten Leinewand, in allem 100 Ellen, zusammen für 100 fl. die Elle der feinsten Sorte kostet 1 fl. 54 Kr. die Elle der mittlern Sorte 56 Kr., und von der geringsten 36 Kr. Wie viele Ellen kaufte er von ieder Sorte? Antw. Von der feinsten Sorte 10 Ellen, von der mittlern 81 Ellen, von der geringsten 9 Ellen. Oder, von der feinen Sorte 20, von der mittlern 42, und von der geringsten 38 Ellen; oder von der feinen Sorte 30 Ellen, von der mittlern 3 Ellen, und von der geringsten 67 Ellen.

98) Eine Putzmacherin kauft dreierlei Sorten Bänder, in allem 100 Ellen, zusammen für 100 fl. Von der feinsten Sorte kostet die Elle 1 fl. 6 Kr. von der mittlern 55 Kr. von der geringsten 24 Kr. Wie viele Ellen hat sie von ieder Sorte gekauft? Antw. Von der feinsten Sorte 68 Ellen, von der mittlern 24 Ellen und von der geringsten 8 Ellen.

Sechste

Sechste Aufgabe.

Jemand hat dreierlei Silber, 10löthiges, 11löthiges und 14löthiges, und will 4 Mark 13löthiges verfertigen, wie viele Lothe muß er von jeder Sorte nehmen?

Es sey die Anzahl Lothe des 14löthigen Silbers $= x$, die Anzahl Lothe des 11löthigen $= y$ und des 10löthigen $= z$.

Da 4 Mark 64 Loth betragen, so ist

$$\text{N. 1)}\quad x + y + z = 64$$

ferner, da bei dem 14löthigen Silber, 16 Loth am Gewicht 14 Loth feines Silber enthalten, so enthalten die x Lothe am Gewicht $\frac{14x}{16}$ Lothe feines Silber.

Auf ähnliche Art findet man, daß y Lothe des 11löthigen Silbers $\frac{11y}{16}$ Lothe feines Silber enthalten, und endlich enthalten z Lothe des 10löthigen Silbers $\frac{10z}{16}$ Lothe feines Silber.

Da nun die Mischung 13löthig werden, das heißt, eine Mark 13 Lothe feines Silber enthalten soll, so werden die 4 Mark, welche die Mischung schwer seyn soll, viermal 13 oder 52 Lothe feines Silber enthalten. Da nun die Anzahl Lothe feines Silber, die in den x, y und z Lothen enthalten sind, diese 52 Lothe ausmachen müssen, so hat man die zweite Gleichung:

$$\frac{14x}{16} + \frac{11y}{16} + \frac{10z}{16} = 52$$

$$14x + 11y + 10z = 52.16$$

$$\text{d. i. N. 2)}\quad 14x + 11y + 10z = 832$$

Man

Man begreift leicht, nachdem man den Grund der Rechnung eingesehen hat, daß man blos x, y und z mit dem correspondirenden feinen Silbergehalt, 14, 11 und 10 multipliciren, ferner den Mittelgehalt 13, mit der Anzahl Lothe, die auf eine Mark gehen, d. h. mit 16 multipliciren, und dieses Product, noch mit der Anzahl Mark, die die Mischung wiegen soll, (hier mit 4) multipliciren darf, um die zweite Gleichung zu erhalten.

Nun nehme man die Gleichung N. 1) und multiplicire sie mit dem kleinsten Coefficienten der einen von den unbekannten Größen, (hier mit 10. dem Coefficienten von z in der Gleichung N. 2) so erhält man

$$10x + 10y + 10z = 640$$

Diese Gleichung subtrahire man von der Gleichung N. 2) nehmlich

N. 2)	$14x + 11y + 10z$	$= 832$
davon ab	$10x + 10y + 10z$	$= 640$
Rest	$4x + y$	$= 192$
Also	$y = 192 - 4x$	

Da nun in dieser Gleichung kein Divisor vorhanden ist, so kann man für x selbst, iede beliebige ganze Zahl nehmen, um y zu berechnen. Nur ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß x so groß angenommen werde, daß wenn man 4x von 192 subtrahirt, y nicht zu groß werde, das heißt, daß y nicht nur kleiner sey als 64 (weil x + y + z = 64 sind,) sondern daß auch, (weil

z = 64

$z = 64 - x - y$) die Werthe von x und y zusammen kleiner als 64 seyen, damit man auch für z einen positiven Werth erhalte.

Wollte man z. B. x annehmen als 20, so wäre $y = 192 - 80$, d. i. $y = 112$, folglich größer als 64, also noch viel zu groß.

Wollte man ferner x annehmen als 40, so wäre $y = 192 - 160$, d. i. $y = 32$, also y zwar kleiner als 64, aber noch würden x und y zusammen größer seyn als 64, (denn $40 + 32$ ist 72) also würde für z kein positiver Werth bleiben.

Man muß also x noch etwas größer annehmen. Es sey also der Werth von $x = 43$, so ist $y = 192 - 172$, d. i. $y = 20$, und also $z = 64 - 43 - 20$, d. i. $z = 1$.

Man nehme ferner x an $= 44$, so ist $y = 192 - 176$, d. i. $= 16$, und $z = 64 - 44 - 16$, d. i. $= 4$. Ferner nehme man x an als 45, so ist $y = 12$ und $z = 7$.

Vergleicht man nun die Werthe von y nehmlich 20, 16 und 12, so sieht man, daß sie um 4 abnehmen. Vergleicht man ferner die Werthe von z, nehmlich 1, 4 und 7, so sieht man, daß sie um 3 zunehmen. Daraus kann man leicht folgende Tabelle verfertigen, wenn man die Werthe von y immer um 4 abnehmen, und die von z um 3 zunehmen läßt.

$x = 43,\ 44,\ 45,\ 46,\ 47$

$y = 20,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4$

$z = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$

Also

Also sind bei dieser Aufgabe fünf verschiedene positive Werthe in ganzen Zahlen, für iede der unbekannten Grössen möglich. Man kann nemlich 43 Lothe von 14löthigen Silber, 20 Lothe vom 11löthigen, und 1 Loth vom 10löthigen, u. s. f. Die Mischung wird immer 13löthig werden.

Da man in dieser Aufgabe auch Zahlen mit Brüchen nützen kann, so finden noch mehrere Werthe statt. Wollte man z. B. x annehmen als $43\frac{1}{2}$, so ist $y = 192 - 4x$, d. i. $192 - 174$ oder 18 und $z = 64 - 43\frac{1}{2} - 18$, d. i. $= 2\frac{1}{2}$ Loth u. s. f.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

99) Jemand hat dreierlei Silber, 11löthiges, 12löthiges und 15löthiges und will eine Mischung von 6 Mark, deren Gehalt 13löthig ist, verfertigen. Wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. Es finden 15 Werthe in ganzen Zahlen statt, wie folgende Tabelle zeigt, in der x die Menge Lothe des 15löthigen, y des 12löthigen und z des 11löthigen Silbers bedeutet.

$$x = 33,\ 34,\ 35,\ \ldots$$
$$y = 60,\ 56,\ 52,\ \ldots$$
$$z = 3,\ 6,\ 9,\ \ldots$$

100) Jemand hat dreierlei Silber, 9löthiges, 14löthiges und $1\frac{1}{2}$ Mark 12löthiges, wie viele Mark 13löthiges wird er aus der Vermischung dieser Silber machen können, wenn die $1\frac{1}{2}$

Mark

Mark 12löthiges Silber ganz dazu genommen werden sollen, und er von dem 14löthigen nicht mehr als 3 Mark hat? (Es seyen die Anzahl Lothe des 14löthigen = x, des 9löthigen = y und der Vermischung = z, so ergeben sich die beiden Gleichungen $x + y + 24 = z$ und $14x + 9y + 288 = 13z$, woraus sich die Gleichung wird herleiten lassen $x = 4y + 24$, in der dann y als 1, 2, u. s. f. angenommen, und daraus x berechnet wird, dann findet man z aus der Gleichung $x + y + 24 = z$). Antw. Die Vermischung wird wiegen 53 Loth, oder 58, oder 63, oder 68, oder 73, oder 78 Loth.

101) In einer Kanonengießerei wurden zweierlei Kanonen gegossen. Von der ersten Art wiegt iede Röhre 16 Centner, und von der zweiten Art 25 Centner, und doch hat man zur zweiten Art einen Centner Metall weniger gebraucht, als zur ersten. Wie viele Röhren von ieder Art waren es? Antw. Von der ersten 11 und von der zweiten 7, oder von der ersten 36 und von der zweiten 23, u. s. f.

Siebente Aufgabe.

Jemand hat 8löthiges, 13löthiges und 15löthiges Silber, und will eine Mischung verfertigen, die 7 Mark wiegt und $11\frac{1}{2}$löthig ist. Wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen?

Auf-

Auflösung.

Es sey die Anzahl Lothe des 15löthigen Silbers $= x$, des 13löthigen $= y$ und des 8löthigen $= z$, so ist, zufolge dem, was in der vorigen Aufgabe gelehrt wurde,

N. 1) $x + y + z = 112$

N. 2) $15x + 13y + 8z = 1288$

davon subtrahirt $8x + 8y + 8z = 896$

Rest $7x + 5y = 392$

Also $y = \frac{392 - 7x}{5}$

oder $y = 78 + \frac{2}{5} - x - \frac{2x}{5}$

Es sey nun $\frac{2x - 2}{5} = w$

so ist $x = \frac{5w + 2}{2}$

oder $x = 2w + \frac{w}{2} + 1$

Ferner sey $\frac{w}{2} = u$, so ist $w = 2u$

Nun nehme man u an als 0, so ist auch $w = 0$, und $x = \frac{0 + 2}{2}$, d. i. $= 1$, $y = 77$ und $z = 112 - x - y$, d. i. $= 34$.

Ferner sey $u = 1$, so ist $w = 2$, $x = 6$, $y = 70$ und $z = 36$.

Ferner sey $u = 2$, so ist $w = 4$, $x = 11$, $y = 63$ und $z = 38$.

Man sieht nun, daß die Werthe von x um 5 zunehmen, die von y um 7 abnehmen, und die von z um 2 zunehmen. Daher kann man folgende Tabelle verfertigen:

$x = 1, 6, 11, 16 \ldots 51$

$y = 77, 70, 63, 56 \ldots 7$

$z = 34, 36, 38, 40 \ldots 54$

Es finden also für iede unbekannte Größe 11 verschiedene Werthe im ganzen positiven Zahlen statt.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

102) Jemand hat 9löthiges, 12löthiges und 14löthiges Silber, und will 5 Mark $13\frac{1}{2}$löthiges verfertigen, wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. Wenn x die Anzahl Lothe des 14l. y des 12l. und z des 9löthigen Silbers bedeutet, so finden folgende Werthe statt.

$$x = 63, 66, 69$$
$$y = 15, 10, 5$$
$$z = 2, 4, 6$$

103) Jemand hat 11karatiges, 14karatiges und 21karatiges Gold, und will eine Mischung verfertigen, die $\frac{1}{2}$ Mark wiegt, und 18karatig ist, wie viele Karate muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. Hier ist keine Auflösung in ganzen positiven Zahlen möglich, weil man aber bei solchen Aufgaben auch Bruchzahlen brauchen kann, so wird die Rechnung zeigen, daß wenn man $7\frac{1}{2}$ Karate vom 21karatigen Gold nimmt, 3 Karate vom 14karatigen und $1\frac{1}{2}$ Karat vom 11karatigen zu nehmen seyen.

104) Ein Münzmeister hat 20karatiges, 17karatiges und 13karatiges Gold, er will eine Mischung machen, die 24 Mark wiegt, und 16karatig ist, wie viele Karate werden von ieder Sorte dazu erfordert? Antw.

Antw. Es finden 61 verschiedene Werthe für iede der unbekannten Größen statt, wovon ich die drei ersten hieher setzen will, x bedeutet die Anzahl Karate des 20karatigen, y des 17karatigen, und z des 13karatigen Goldes.

$$x = 4,\ 8,\ 12,\ \text{u. s. f.}$$
$$y = 425,\ 418,\ 411,\ \text{u. s. f.}$$
$$z = 147,\ 150,\ 153,\ \text{u. s. f.}$$

105) Ein Kaufmann hat dreierlei Sorten Kaffee, von der ersten kostet das ℔ 2 fl., von der zweiten das ℔ 1 fl. 40 Kr. von der dritten das ℔ 1 fl. 18 Kr. Er will eine Mischung treffen, daß er das ℔ für 1 fl. 30 Kr. geben kann. Wenn nun die Mischung 4 Centner wiegen soll, wie viele ℔ muß er von ieder Sorte nehmen? Antwort. Es sey die Anzahl der ℔ von der ersten Sorte = x, die von der zweiten = y, und die von der dritten = z, so finden 10 Werthe statt.

Wenn	$x =$	9	20	31	u. s. f.
so ist	$y =$	201	180	159	u. s. f.
und	$z =$	190	200	210	u. s. f.

Achte Aufgabe.

Ein Goldarbeiter hat viererlei Silber, 10löthiges, 11löthiges, $13\frac{1}{2}$löthiges und 14löthiges, er will eine Mischung machen, die 4 Mark schwer und $12\frac{1}{2}$löthig ist. Wie viel muß er von ieder Sorte nehmen?

Auflösung.

Die Anzahl Lothe des 14löthigen sey $= x$, des $13\frac{1}{2}$löthigen $= y$, des 11löthigen $= z$, und des 10löthigen $= w$, so ist

$$\text{N. 1)} \quad x + y + z + w = 64$$
$$\text{N. 2)} \quad 14x + 13\tfrac{1}{2}y + 11z + 10w = 800$$

Man multiplicire N. 2) mit 2, um den Bruch wegzubringen, so erhält man

$$28x + 27y + 22z + 20w = 1600$$

Ferner multiplicire man N. 1) mit 20, so giebt dieß

$$20x + 20y + 20z + 20w = 1280$$

und subtrahire solche von der vorhergehenden, so ist der Rest

$$8x + 7y + 2z = 320$$

Folglich $\quad z = \frac{320 - 8x - 7y}{2}$

Man nehme nun den Werth von x beliebig an, z. B. $= 1$,

so ist $z = \frac{320 - 8 - 7y}{2}$

oder $z = \frac{312 - 7y}{2}$

Man dividire wirklich, so ist $z = 156 - 3y - \frac{y}{2}$

Es sey $\frac{y}{2} = u$, so ist $y = 2u$

Nun nehme man für u einen Werth so an, daß sich auch noch für w einer findet, z. B. 19, so ist $y = 38$ und $z = \frac{312 - 266}{2}$, d. i. $z = 23$

und

und w, welches $= 64 - x - y - z$ ist, wird $= 2$. Dann nehme man $u = 20$, so findet man $y = 40$, $z = 16$ und $w = 7$ u. s. f. und ordne diese Werthe in eine Tabelle.

$x =$	1	1	1	1
$y =$	38	40	42	44
$z =$	23	16	9	2
$w =$	2	7	12	17

Dieß sind also viererlei Werthe für y, z und w, wobei $x = 1$ ist. Alsdann nehme man x als 2 an, kehre zur Gleichung

$$z = \frac{320 - 8x - 7y}{2} \text{ zurück,}$$

und substituire in ihr für x den angenommenen Werth 2, so ist

$$z = \frac{320 - 16 - 7y}{2}$$

oder $z = \frac{304 - 7y}{2}$

Man dividire wirklich, so ist

$$z = 152 - 3y - \tfrac{y}{2}$$

es sey $\frac{y}{2} = t$, so ist $y = 2t$

Man nehme nun für t einen solchen Werth an, daß auch für w sich noch einer findet, z. B. 19, so ist $y = 38$, $z = \frac{304 - 7y}{2}$ oder $= 19$, und $w = 64 - x - y - z$, d. i. $w = 64 - 2 - 38 - 19$ oder $w = 5$.

Alsdann nehme man t als 20 an, so findet man $y = 40$, $z = 12$, und $w = 10$.

Auf diese Art verfahre man ferner, und ordne die gefundenen Werthe in eine Tabelle. Nemlich

x =	2	2	2
y =	38	40	42
z =	19	12	5
w =	5	10	15

Auf diese Art kann man weiter verfahren, und in der Annahme des Werths für x bis 38 fortgehen, so werden sich in allem über hundert Werthe in ganzen positiven Zahlen für iede der unbekannten Größen ergeben. Der letzte wird seyn

$$x = 38, \; y = 2, \; z = 1, \; w = 23$$

Aehnliches Exempel zur Uebung.

106) Jemand hat viererlei Silber, 9löthiges, 12löthiges, 14löthiges und 15löthiges, und will eine Mischung, die 13löthig ist, und 2 Mark wiegt, machen, wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen? Antw. Es sey die Anzahl Lothe des 15löthigen = x, des 14l. = y, des 12l. = z, und des 9l. = w, so zeigt folgende Tabelle einige Werthe der unbekannten Größen.

Erste Classe.				Zweite Classe.			
x =	1	1	1	x =	2	2	2
y =	16	19	22	y =	16	19	22
z =	14	9	4	z =	12	7	2
w =	1	3	5	w =	2	4	6

und so kann man fortfahren, bis man x = 20 angenommen hat, dann sind die letzten Werthe

$x = 20$, $y = 1$, $z = 1$ und $w = 10$. Es finden also in allem über 50 verschiedene Werthe in ganzen positiven Zahlen statt.

Neunte Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, die wenn sie durch 2 dividirt wird, 1 zum Rest läßt, wenn sie durch 3 dividirt wird, 2 zum Rest läßt, wenn sie durch 4 dividirt wird, 3 zum Rest läßt, und wenn sie durch 5 dividirt wird, 4 zum Rest läßt.

Auflösung.

Diese gesuchte Zahl sey $= x$. Da sie, durch 2 dividirt, 1 zum Rest läßt, so wird sie sich also wenn sie um 1 vermindert wird, durch 2 ohne Rest theilen lassen, das heißt, der Ausdruck $\frac{x-1}{2}$ wird eine ganze Zahl seyn. Ferner, da sie, durch 3 dividirt, 2 zum Rest läßt, so wird sie sich um 2 vermindert durch 3 ohne Rest theilen lassen, oder der Ausdruck $\frac{x-2}{3}$ wird auch eine ganze Zahl seyn. Aus eben dem Grund wird auch $\frac{x-3}{4}$ und $\frac{x-4}{5}$ eine ganze Zahl seyn.

Nun sollen t, u, v und w ganze Zahlen bedeuten.

Es sey also $\frac{x-1}{2} = t$, $\frac{x-2}{3} = u$, $\frac{x-3}{4} = v$ und $\frac{x-4}{5} = w$, so folgt

aus der ersten Gleichung $x = 2t + 1$
aus der zweiten $x = 3u + 2$
aus der dritten, $x = 4v + 3$
und aus der vierten, $x = 5w + 4$

Folglich ist $2t + 1 = 3u + 2$

$$2u + 2 = 4v + 3$$

und $4v + 3 = 5w + 4$

Also $t = \frac{3u+1}{2}$, $u = \frac{4v+1}{3}$ und $v = \frac{5w+1}{4}$

Nun nehme man die letzte Gleichung

$$v = \frac{5w+1}{4}$$

so ist $v = w + \frac{w}{4} + \frac{1}{4}$

Es sey nun $\frac{w}{4} + \frac{1}{4}$ oder $\frac{w+1}{4} = p$

so ist $w = 4p - 1$

also v welches $= \frac{5w + 1}{4}$ ist $= \frac{5(4p-1)+1}{4}$

das ist $v = \frac{20p - 5 + 1}{4}$ oder $v = \frac{20p - 4}{4}$

das ist $= 5p - 1$.

Nun war $u = \frac{4v + 1}{3}$, da aber $v = 5p - 1$ ist, so ist $u = \frac{4(5p-1)+1}{3}$ oder $= \frac{20p - 4 + 1}{3}$

d. i. $= \frac{20p - 3}{3}$ oder $u = 6p + \frac{2p}{3} - 1$.

Es sey nun $\frac{2p}{3} = q$

so ist $p = \frac{3q}{2}$

oder $p = q + \frac{q}{2}$

Endlich sey $\frac{q}{2} = r$, so ist $q = 2r$

Da nun $p = \frac{3q}{2}$, so ist $p = \frac{6r}{2}$, d. i. $p = 3r$.

Und

Und da $u = \frac{20p - 3}{3}$ war, so ist $u = \frac{60r - 3}{3}$, d. i. $u = 20r - 1$.

Nun war $t = \frac{3u + 1}{2}$, also ist $t = \frac{3(20r - 1) + 1}{2}$ oder $= \frac{60r - 3 + 1}{2}$, das ist $= \frac{60r - 2}{2}$ oder $t = 30r - 1$.

Es war aber $x = 2t + 1$, folglich ist $x = 2(30r - 1) + 1$, d. i. $= 60r - 2 + 1$ oder $x = 60r - 1$.

Nun kann man für r die ganzen Zahlen nach der natürlichen Ordnung nehmen. Ist nehmlich $r = 1$ so ist $x = 59$. Nimmt man r als 2 an, so ist $x = 120 - 1$, d. i. $= 119$. Nimmt man ferner $r = 3$ an, so ist $x = 180 - 1$, d. i. $= 179$, und so fort ins Unendliche.

Vergleicht man nun die Werthe von x, als 59, 119 und 179, so sieht man, daß sie um 60 zunehmen. Man hat also folgende Reihe für x 59, 119, 179, 239, 299, 359, 419 u. s. f. ins Unendliche.

Alle diese Zahlen haben nemlich die verlangte Eigenschaft, daß sie durch 2 dividirt, 1 zum Rest lassen, durch 3 dividirt, 2 zum Rest lassen, durch 4 dividirt, 3 zum Rest lassen, und durch 5 dividirt, 4 zum Rest lassen.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

107) Welche Zahlen lassen durch 3 dividirt, 1 zum Rest, und durch 5 dividirt, 2 zum Rest.

Antw.

Antw. 7, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, u. s. f. ins Unendliche, in einer Reihe, deren Glieder um 15 zunehmen.

108) Welche Zahlen lassen, wenn sie durch 3 dividirt werden, 2 zum Rest, durch 7 dividirt 3 zum Rest, und durch 10 dividirt, 9 zum Rest? Antw. 59, 269, 479, 689, 899, 1109, 1319, u. s. f. ins Unendliche, in einer Reihe, deren Glieder um 210 zunehmen.

109) Zwei Spieler gewannen zweien andern so viele Ducaten ab, daß sie, als sie vom Spieltische aufstunden und ihren Gewinn überzählten, fanden, daß er in allem 494 Ducaten betrug. Der eine, der seinen Gewinn nach Würfen von fünf Stücken zählte, gab den Ducaten, der ihm übrig blieb, dem Aufwärter; der andere, der seinen Gewinn nach Würfen von sechs Stücken zählte, gab den Ducaten, der ihm übrig blieb, seinem Bedienten. Wie viele Ducaten hat ieder gewonnen? Antw. (Um die Gleichungen herzuleiten, verfahre man so. Es sey $x =$ dem Gewinn des ersten, und $y =$ dem Gewinn des zweiten, so ist $x + y = 494$, wenn nun v und w ganze Zahlen bedeuten, so ist $\frac{x-1}{5} = v$, und $\frac{y-1}{6} = w$, folglich $x = 5v + 1$, und $y = 6w + 1$, also $5v + 1 + 6w + 1 = 494$. Wenn man nun gehörig weiter rechnet, so findet man 17 verschiedene Werthe für iede der unbekannten Größen. Nemlich der erste hat gewonnen 481 und der zweite 13 Ducaten, oder der

der erste 451 Ducaten, und der zweite 43 Ducaten; oder der erste 421 Ducaten und der zweite 73, u. s. f. so daß die Werthe von x um 30 abnehmen, und die von y um 30 zunehmen.

110) Da ein Neugieriger, der die Art ihres Zählens und was übrig geblieben war, bemerkt hatte, diese beiden Spieler fragte, wie viel jeder gewonnen hätte, antwortete der erste, er habe keine zweihundert Ducaten, sein Gesellschafter aber über 300 Ducaten gewonnen, wie viel hat ieder gewonnen? Antw. Nun reduciren sich die vorigen 17 verschiedenen Werthe auf die vorletzten. Der erste hatte nemlich 181 Ducaten gewonnen, und der zweite 313; oder der erste 151 und der zweite 343; oder der erste 121 und der zweite 373.

111) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 100 Eyer zu Markte. Wenn die erste ihre Eyer zu 8 überzählt, so bleiben 7 übrig, und wenn die andere die ihrigen zu 10 überzählt, so bleiben gleichfalls 7 übrig. Wie viele Eyer hatte iede? Antw. Die erste 23 und die andere 77, oder die erste 63 und die andere 37.

Sechster Abschnitt.

Von den quadratischen Zahlengleichungen, oder von den Zahlengleichungen des zweiten Grads.

§. 1.

Wenn eine Zahl mit sich multiplicirt wird, so heißt das Product das Quadrat oder die zweite Potenz der Zahl. Z. B. 7 mit sich multiplicirt giebt 49, also ist 49 das Quadrat oder die zweite Potenz von 7, ferner 8 mal 8 macht 64, also ist 64 das Quadrat oder die zweite Potenz von 8. Eben so ist 256 das Quadrat oder die zweite Potenz von 16, weil 16 mal 16 zum Product 256 giebt.

§. 2. Folgende Tabelle enthält die Quadrate der ersten 9 ganzen Zahlen.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadrate	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81

§. 3. Die Zahlen, welche in dieser Tabelle über den Quadratzahlen stehen, heißen die Quadratwurzeln der darunter stehenden Zahlen. Z. B. 5 ist die Quadratwurzel von 25, und 8 ist die Quadratwurzel von 64 u. s. f.

§. 3.

§. 4. Es ist nehmlich die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl, dieienige Zahl, die, wenn sie mit sich multiplicirt wird, die gegebene Zahl hervorbringt.

§. 5. Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl ziehen, heißt also soviel als eine Zahl finden, die, wenn sie mit sich multiplicirt wird, die gegebene Zahl hervorbringt.

§. 6. Eine ganze Zahl, deren Quadratwurzel gleichfalls eine ganze Zahl ist, heißt eine vollkommne Quadratzahl. Z. B. 4, 25, 36, 256, sind vollkommne Quadratzahlen, weil ihre Quadratwurzeln 2, 5, 6, und 16 ganze Zahlen sind.

§. 7. Hat eine vollkommne Quadratzahl nur eine oder zwei Ziffern, so giebt die vorige Tabelle die Quadratwurzel davon an, hat sie aber mehr als zwei Ziffern, so muß man nach einer gewissen Vorschrift verfahren, um die Quadratwurzel auszuziehen.

§. 8. Diese Vorschrift besteht aus folgenden Regeln:

1) Man theilt die gegebene vollkommene Quadratzahl von der rechten zur linken Hand in Classen, so daß iede Classe aus zwei Ziffern besteht, nur die letzte Classe linker Hand kann auch blos eine haben. Z. B. Die gegebene vollkommne Quadratzahl, aus der die Quadratwurzel gezogen werden soll, sey 5625, so theile man sie von der rechten zur linken in Classen

56 | 25

2) Man

2) Man betrachte die Zahl die in der letzten Classe linker Hand steht, (hier 56) und vergleiche damit in der neben stehenden Tabelle die Quadratzahlen, schreibe die nächst kleinere (hier 49) heraus, und setze sie unter die Zahl der letzten Classe. Nehmlich so 56 | 25

49

3) Ferner nehme man aus eben dieser Tabelle die über der genommenen Quadratzahl stehende Quadratwurzel, (hier 7) und schreibe sie gleichfalls heraus, nemlich so | 56 | 25 | 7

| 49 |

so ist diese angesetzte Quadratwurzel die eine Ziffer der gesuchten Quadratwurzel.

4) Hierauf subtrahire man die herausgeschriebene Quadratzahl von der in der letztern Classe befindlichen Zahl, und nehme zum Rest die folgende Classe herab, nemlich so:

| 56 | 25 | 7

| 49 |

725

5) Alsdann verdoppele man die gefundene Ziffer der Quadratwurzel, (hier die 7) und gebrauche dieses Doppelte als Divisor, um die zweite gesuchte Ziffer der Quadratwurzel zu erhalten. Nemlich so:

| 56 | 25 | 75

| 49 |

725

14

Nem-

Nemlich 14 als das Doppelte von 7 ist hier so unter 725 gesetzt, daß das 4, als die erste Ziffer von 14 unter 2, d. h. unter die Zehner der Zahl 725 zu stehen kommt, und nun ist mit diesem 14 in die darüberstehenden 72 dividirt, der Quotient ist als die neue Ziffer der Quadratwurzel angesetzt, so hat man die ganze Quadratwurzel von 5625. Um nun zu finden, ob 75 wirklich die Quadratwurzel ist, d. i. ob kein Rest bleibt, muß man ferner auf folgende Art verfahren.

6) Man erhebe die zuletzt gefundene Ziffer (hier 5) der Quadratwurzel aufs Quadrat, (macht 25) und ferner multiplicire man den Divisor, (hier 14) mit der zuletzt gefundenen Ziffer der Quadratwurzel, (hier mit 5) zu diesem Product, (hier 70) welches eigentlich nicht aus Einern, sondern aus Zehnern besteht, (weil nemlich das 7 in der Quadratwurzel Zehner bedeutet, und folglich das 14 auch, und daher auch die 70) addire man das Quadrat der zuletzt gefundenen Ziffer der Quadratwurzel, und subtrahire die Summe von der darüber stehenden Zahl.

```
|56|25|75
|49   |
-----
  725
  14
  725
 -----
   0
```

Es ist nemlich das 5 von 25 zuerst angesetzt, und das 2 zu dem 5mal 14 oder zu 70 addirt worden,

so

so macht die Summe 725, die von der darüber stehenden Zahl subtrahirt, Null zum Rest läßt. Also ist 75 genau die Quadratwurzel von 5625, oder wenn man 75 mit sich multiplicirt, so erhält man zum Product 5625.

§. 9. Der Grund des angegebenen Verfahrens kann leicht eingesehen werden, wenn man 75 mit sich auf folgende Art multiplicirt, indem man die einzelnen Producte völlig ansetzt.

$$\begin{array}{r} 75 \text{ Quadratwurzel} \\ \underline{75} \\ 25 \\ 35 \\ 35 \\ \underline{49} \\ 5625 \text{ Quadrat.} \end{array}$$

Man sieht hier, daß das Quadrat 5625 aus 4900, aus zweimal 350 und aus 25 als seinen Theilen zusammengesetzt ist, die Quadratwurzel besteht aber aus zwei Theilen, nemlich aus 70 und 5, oder aus 7 Zehnern und 5 Einern, die Zehner nenne ich den ersten Theil und die Einer den zweiten Theil derselben. Stellt man sich nun die Quadratwurzel als unbekannt vor, und will solche aus der gegebenen Quadratzahl finden, so darf man nur die drei Theile der Quadratzahl zu erhalten suchen, um daraus die Quadratwurzel zu bestimmen. Nun ist der Theil 4900 das Quadrat von den 7 Zehnern der Quadratwurzel, der Theil zweimal 350 ist soviel als zweimal 7 Zehner multi-

tiplicirt mit den 5 Einern der Quadratwurzel, (weil 350 = 70mal 5) und 25 ist das Quadrat der 5 Einer der Quadratwurzel.

Wenn also eine Quadratwurzel aus zwei Theilen besteht, so besteht das Quadrat derselben aus drei Theilen, nemlich 1) aus dem Quadrat des ersten Theils der Quadratwurzel, 2) aus dem Product des Doppelten dieses Theils in den andern Theil der Quadratwurzel, und 3) aus dem Quadrat des zweiten Theils der Quadratwurzel.

§. 10. Nun fängt sich das Quadrat des ersten Theils der Quadratwurzel, das heißt, das Quadrat der Zehner in der Stelle der Hunderter an, also ist es klar, daß wenn man die Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen theilt, und auf eine Classe zwei Ziffern rechnet, das gedachte Quadrat des ersten Theils der Quadratwurzel in der zweiten Classe der Quadratzahl ganz enthalten seyn müße.

§. 11. Subtrahirt man also dieses Quadrat (in unserm Beispiel 4900) von der Quadratzahl 5625, so bleibt der Rest 725, den ich mit r bezeichnen will. Ferner ist 70 oder 7 Zehner, als die Quadratwurzel von 49 Hunderten, der erste Theil der gesuchten Quadratwurzel. Der Rest 725 oder r besteht nun noch 1) aus 700 als dem Product des doppelten ersten Theils der Quadratwurzel in den zweiten Theil derselben, und 2) aus 25, dem Quadrat dieses zweiten Theils.

§. 12. Da dieser zweite Theil der Quadratwurzel als unbekannt angesehen wird, so ist klar, daß man ihn finden wird, wenn man mit 14 Zehnern, d. h. dem doppelten gefundenen ersten Theil der Quadratwurzel in die Zahl 700 dividirt. Erhebt man ferner diesen gefundenen zweiten Theil 5 der Quadratwurzel aufs Quadrat, so ist dieses 25. Multiplicirt man endlich mit diesem zweiten Theil 5 den Divisor, (nemlich das doppelte des ersten Theils,) so erhält man 700. Diese 700 und die 25 addirt, geben eine Summe, die dem Rest r gleich ist, und die also von ihm subtrahirt, zum Rest 0 läßt.

§. 13. Ich setze hier noch ein paar Beispiele her. Es soll nemlich die Quadratwurzel aus der Zahl 3969 gezogen werden.

```
| 39 | 69 | 63
| 36 |
 ----
    369
     12
    369
  ---------
      0
```

Ferner, es soll die Quadratwurzel aus 7921 gezogen werden

```
| 79 | 21 | 89
| 64 |
 ----
   1521
    16
   1521
  ---------
     0
```

Exem-

Exempel zur Uebung.

Wie ist die Quadratwurzel von 7396, ferner von 6084, ferner von 2916, ferner von 2601, ferner von 2209, ferner von 841, ferner von 961, ferner von 324? Antw. 86, 78, 54, 51, 47, 29, 31 und 18.

§. 14. Besteht eine vollkommne Quadratzahl aus mehr als vier Ziffern, so verfährt man auf ähnliche Art, um die Quadratwurzel auszuziehen. Man theilt nemlich zuerst die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, iede von zwei Ziffern, außer die letzte linker Hand kann auch nur eine haben, und dann verfährt man weiter wie vorhin. Z. B. Es soll aus 316969 die Quadratwurzel gezogen werden.

```
|31|69|69|563
|25      |
 ---
  669
 (10)
  636
 ----
   3369
    112
   3369
   ----
     0
```

Es ist nemlich da, wo zum Rest 33 blieb, die nächste Classe 69 herabgesetzt, hierauf das doppelte von 56, als den beiden ersten gefundenen Theilen der Quadratwurzel zum Divisor genommen, und damit in 336 dividirt worden, der

Quotient 3 ist der gesuchte dritte Theil der Quadratwurzel, dieser wurde aufs Quadrat erhoben, und hierauf mit dem nehmlichen Theil 3 der Divisor multiplicirt.

Aus 99856 die Quadratwurzel zu ziehen.

```
|9|98|56|316
|9
 ──
    98
    6
    61
   ────
    3756
     62
    3756
   ─────
      0
```

Exempel zur Uebung.

Wie ist die Quadratwurzel von 119025, ferner von 583696, ferner von 767376, ferner von 81796, ferner von 73441, ferner von 824464? Antw. 345, 764, 876, 286, 271 und 908.

§. 15. Wenn bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ein Rest bleibt, so kann man vermittelst Decimaltheile dem wahren Werth der Quadratwurzel immer näher kommen, man wird ihn aber nie völlig erreichen. Eine solche Quadratzahl heißt eine **unvollkommne Quadratzahl**, und ihre Quadratwurzel, deren Decimalziffern ins Unendliche gehen, eine **Irrationalzahl**.

Zum

Zum Beispiel, es soll aus 863 die Quadratwurzel gezogen werden.

```
|8|63 |29,37
|4    |
 463
   4
 441
*2200
  58
 1749
  45100
   586
  41069
   4031 u. s. f.
```

Die mit einem * bemerkte Zahl 22 ist der Rest, der von der ganzen Zahl 863 übrig bleibt, also setzt man zur Quadratwurzel 29 ein Comma, um anzudeuten, daß nun die Decimalstellen angehen, hierauf hängt man an den Rest 22 zwei Nullen, nimmt das doppelte von 29, nemlich 58 als Divisor, und setzt den Quotienten 3 nach dem Comma in der Quadratwurzel, so bedeutet die Ziffer 3 Zehntheilchen, und auf diese Art fährt man ferner fort, um auch Hunderttheilchen, Tausendtheilchen, Zehntausendtheilchen und noch mehrere Decimalziffern zu finden.

Exempel zur Uebung.

Wie ist die Quadratwurzel von 365? Antw. 19,10497 . . .

Wie ist die Quadratwurzel von 43? Antw. 6,55743 ...

Wie ist die Quadratwurzel von 7384? Antw. 85,930204 ...

§. 16. Wenn ein Bruch aufs Quadrat erhoben werden soll, so muß man sowohl den Nenner als Zähler aufs Quadrat erheben. Z. B. Es soll $\frac{7}{8}$ aufs Quadrat erhoben werden, so muß man $\frac{7}{8}$ mit sich multipliciren, dieß giebt zum Product $\frac{49}{64}$.

§. 17. Soll man also aus einem Bruch die Quadratwurzel ziehen, so muß sie aus dem Zähler und Nenner gezogen werden. Z. B. Die Quadratwurzel von $\frac{25}{36}$ ist $\frac{5}{6}$, die Quadratwurzel von $\frac{81}{100}$ ist $\frac{9}{10}$. Ist der Nenner eine unvollkommne Quadratzahl, wie z. B. 7 im Bruch $\frac{5}{7}$, so multiplicire man Zähler und Nenner mit dem Nenner, so wird der Nenner eine vollkommne Quadratzahl, also läßt sich die Quadratwurzel aus dem Bruch bequemer ziehen. Z. B. aus $\frac{35}{49}$ ist sie leichter auszuziehen als aus $\frac{5}{7}$, denn man zieht sie aus 35, und dividirt mit 7.

§. 18. Wenn irgend eine Zahl aufs Quadrat erhoben werden soll, so kann dieß, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, auf folgende Art bezeichnet werden. Man setzt oberhalb der Zahl zur Rechten ein 2, welches andeutet, daß die Zahl auf die zweite Potenz erhoben werden soll. Z. B. 8^2 bedeutet die zweite Potenz, oder das Quadrat von 8. Eben so, wenn der Ausdruck x^2 vorkommt, so deutet er an, daß die Zahl x

aufs

aufs Quadrat erhoben werden soll. Das kleine 2, welches rechts über x steht, heißt der Exponent der Potenz. Eben so bedeutet y^2 soviel als y mal y oder das Quadrat von y u. s. f.

§. 19. Die Quadratwurzelausziehung wird durch das Zeichen $\sqrt{}$ angedeutet. Auf diese Art bedeutet $\sqrt{25}$ die Quadratwurzel von 25, oder 5, ferner $\sqrt{81}$ die Quadratwurzel von 81, d. i. 9. Eben so bedeutet $\sqrt{\frac{25}{36}}$, daß aus dem Bruch $\frac{25}{36}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, da nun diese aus Zähler und Nenner gezogen werden muß, so kann man die vorige Bezeichnung in die verwandeln $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

§. 20. Die Bezeichnung $\frac{\sqrt{64}}{3}$ bedeutet, daß die Quadratwurzel von 64 mit 3 dividirt werden soll.

§. 21. Die Bezeichnung $\sqrt{(15+36)}$ bedeutet, daß aus der Summe der beiden Zahlen 15 und 36 die Quadratwurzel gezogen werden soll, und $\sqrt{(48-14)}$ bedeutet, daß aus der Differenz der Zahlen 48 und 14 die Quadratwurzel gezogen werden soll, d. h. sie ist so viel als $\sqrt{34}$.

§. 22. Die Quadratwurzel einer positiven Zahl, kann sowohl positiv als negativ seyn. Z. B. Die Quadratwurzel von $+64$ kann sowohl $+8$ als -8 seyn.

§. 23. Um dieses einzusehen, muß man die Regeln der Multiplication der positiven und negativen Zahlen wissen. Es können nemlich bei der Multiplication vier Fälle vorkommen. Denn entweder ist der Multiplicand negativ und der Multiplicator positiv, oder es ist der Multiplicand positiv und der Multiplicator negativ, oder es ist Multiplicand und Multiplicator positiv, oder es ist Multiplicand und Multiplicator negativ.

§. 24. Wenn der Multiplicand negativ ist, und der Multiplicator positiv, z. B. wenn —8 mit +3 multiplicirt werden soll, so wird das Product negativ, d. h. es ist —24. Denn —8 mit +3 multipliciren, heißt —8 so viel mal nehmen, als der Multiplicator Einer hat, und da das Product mit dem Multiplicand gleichartig ist, der Multiplicand aber negativ ist, so wird das Product gleichfalls negativ.

§. 25. Wenn der Multiplicand positiv ist, und der Multiplicator negativ, z. B. wenn +8 mit —3 multiplicirt werden soll, so wird das Product negativ, d. h. es ist —24. Denn wenn +8 mit 3 multiplicirt wird, so ist das Product positiv, oder +24, weil das Product mit dem Multiplicand gleichartig ist. Weil aber der Multiplicator —3 negativ ist, so muß dieses positive Product als subtrahirend betrachtet werden, eine positive Zahl aber, die von irgend einer andern Zahl zu subtrahiren ist, ist als eine negative Zahl zu betrachten, die zu irgend einer andern Zahl

zu

zu addiren ist, d. h. —(+ 24) ist eben so viel als — 24. (Dritter Abschnitt §. 23 und 24).

§. 26. Wenn Multiplicand und Multiplicator positiv sind, so wird das Product positiv. Denn wenn z. B. + 8 mit + 3 zu multipliciren ist, so wird das Product + 24, weil es mit dem Multiplicand gleichartig ist.

§. 27. Wenn Multiplicand und Multiplicator negativ sind, so wird das Product positiv, d. h. — 8 mit — 3 multiplicirt, giebt zum Product + 24. Denn man stelle sich einen Multiplicand z. B. + 12 aus zwei Theilen bestehend vor, z. B. aus + 20 — 8, und der Multiplicator sey — 3, so muß mit diesem — 3 ieder Theil des Multiplicands multiplicirt werden. Man multiplicire nun zuerst den Theil + 20 mit — 3, so ist das Product — 60, (§. 25.) aber dieses negative Product ist größer als es seyn soll, (weil eigentlich nicht + 20 sondern + 20 — 8 oder + 12 mit — 3 zu multipliciren ist, und dieses nur — 36 giebt,) um nun das negative Product — 60 auf den richtigen Werth zu bringen, so multiplicire man auch den zweiten Theil — 8 mit — 3, und betrachte das Product 24 als positiv, d. h. als + 24, so ist das ganze Product — 60 + 24 wirklich so viel als — 36. (Dritter Abschnitt, §. 12.) Also giebt — 8 mit — 3 multiplicirt, ein positives Product, nemlich + 24.

§. 28. Die von §. 24 bis 27. angegebenen Regeln, lassen sich kurz so ausdrücken: Wenn Mul-

Multiplicand und Multiplicator einerlei Zeichen haben, so wird das Product positiv, haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird das Product negativ.

§. 29. Die nemliche Regel gilt auch für die Division. Wenn nemlich Divisor und Dividend einerlei Zeichen haben, so ist der Quotient positiv, haben sie aber verschiedene Zeichen, so ist der Quotient negativ. Z. B. + 36 dividirt mit — 9 giebt zum Quotienten — 4. Aber — 36 mit — 9 dividirt, giebt zum Quotienten + 4. Der Grund davon ist leicht einzusehen, weil nemlich der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, wieder den Dividend geben muß. Denn gesetzt — 36 mit — 9 dividirt, gäbe nicht + 4 sondern — 4 zum Quotienten, so müßte — 4 mit dem Divisor — 9 multiplicirt, den Dividend — 35 geben, welches unmöglich ist, weil — 4 mit — 9 multiplicirt + 36 giebt.

§. 30. Nun erst wird der Satz, der im §. 22. vorgetragen wurde, deutlich seyn. Nemlich wenn + 8 aufs Quadrat erhoben, d. h. mit + 8 multiplicirt wird, so ist das Quadrat 64 positiv. (§. 26.) Eben so, wenn — 8 mit — 8 multiplicirt, oder aufs Quadrat erhoben wird, so wird das Product gleichfalls positiv, oder es ist gleichfalls + 64. (§. 27.) Also hat das Quadrat + 64 zweierlei Quadratwurzeln + 8 und — 8, die in Absicht auf die Zahl völlig einerlei, aber in Absicht auf die Zeichen entgegengesetzt sind.

§. 31.

§. 31. Wenn folglich der Ausdruck vorkommt $\sqrt{64}$, so kann dieser sowohl positiv als negativ seyn, daher schreibt man ihn so $\pm\sqrt{64}$, man setzt nemlich das + und — Zeichen unter einander vor das Quadratwurzelzeichen.

§. 32. Hingegen ist $\sqrt{-64}$ ein sich widersprechender Ausdruck. Denn er bedeutet, es soll aus der negativen Zahl 64 die Quadratwurzel ausgezogen werden. Die Quadratwurzel einer negativen Zahl ist aber unmöglich. Denn sie müßte entweder positiv oder negativ seyn. Ist sie positiv, so ist ihr Quadrat auch positiv, ist sie negativ, so ist ihr Quadrat wiederum positiv, (§. 27.) also entsteht in beiden Fällen kein negatives Quadrat. Um dieses zu erläutern, so sey $\sqrt{-64} = +8$, so müßte $+8$ mit sich multiplicirt -64 geben, dieß ist aber unmöglich, denn $+8$ mit $+8$ multiplicirt, giebt $+64$. Wäre aber $\sqrt{-64} = -8$, so müßte -8 mit sich multiplicirt -64 geben. Dieß ist aber gleichfalls unmöglich. Denn -8 mit -8 multiplicirt giebt auch $+64$. (§. 27.). Also ist $\sqrt{-64}$ ein sich widersprechender Ausdruck, oder, wie man gewöhnlich sagt, eine imaginäre Größe.

§. 33. Gleichungen von dieser Form

$$x^2 + 30 = 286$$
$$x^2 + 6x - 20 = 580$$

heißen quadratische Gleichungen. In ihnen kommt nemlich das Quadrat der unbekannten

Größe

Größe vor. In der ersten Gleichung $x^2 + 30 = 286$, kommt blos das Quadrat der unbekannten Größe x vor. Eine solche Gleichung heißt eine **reine** quadratische Gleichung. In der zweiten Gleichung $x^2 + 6x - 20 = 580$ kommt nicht nur x^2, d. i. das Quadrat der unbekannten Größe vor, sondern noch dazu das x selbst. Eine solche heißt eine **unreine** oder gemischte quadratische Gleichung.

§. 34. Jede Art dieser quadratischen Gleichungen erfordert eine eigene Behandlung, um die unbekannte Größe zu entwickeln.

A. Von den reinen quadratischen Zahlengleichungen.

§. 35. Diese sind leicht aufzulösen, wenn man die Quadratwurzel auszuziehen versteht. Es sey folgende reine quadratische Gleichung aufzulösen

$$x^2 + 30 = 286$$

so ist $x^2 = 286 - 30$

oder $x^2 = 256$

Da also x^2 oder das Quadrat von x der Zahl 256 gleich ist, so wird die Quadratwurzel von x^2 der Quadratwurzel von 256 gleich seyn, denn wenn zwei Quadratzahlen gleich sind, so sind auch ihre Quadratwurzeln gleich. Nun ist die Quadratwurzel von x^2 das x selbst, weil x mal x das Quadrat von x giebt, also ist (nach §. 19.)

$$x = \sqrt{256}$$

Diese

Diese $\sqrt{256}$ kann nun positiv oder negativ seyn (§. 30.) folglich wird diese Gleichung so geschrieben, (§. 31.) $x = \pm\sqrt{256}$

Zieht man nun die Quadratwurzel aus 256, (nach §. 8.) so findet man solche = 16, folglich ist $x = \pm 16$

Also ist x entwickelt, oder die reine quadratische Gleichung aufgelößt werden. Ob man keinen Rechnungsfehler begangen hat, kann man auf folgende Art prüfen. Man nehme die anfängliche Gleichung $x^2 + 30 = 286$

Nun nehme man ferner den einen der gefundenen Werthe von x, z. B. + 16. und erhebe ihn aufs Quadrat, dieses ist + 256 als der Werth von x^2, endlich substituire man diesen in der Gleichung, so hat man $256 + 30 = 286$

Addirt man nun 256 und 30, so macht die Summe wirklich 286. Hierauf nehme man den andern gefundenen Werth von x, nehmlich − 16, und erhebe ihn aufs Quadrat, dieses ist + 256, (§. 27.) und substituire diese Zahl gleichfalls für x^2 in der anfänglichen Gleichung, so erhält man wieder $256 + 30 = 286$

Erste Aufgabe.

In mehrern Gesellschaften wurde für sechs Hausarme eine Collecte gesammelt. Da diese sehr ergiebig ausfiel, so beschloßen die Unternehmer

noch mehrere Hausarme daran Theil nehmen zu lassen. Nun meldeten sich so viele, daß man die Hälfte davon abweisen mußte, und dennoch bekam einer, als die Collecte ausgetheilt wurde, nur 5 fl., so daß 3000 fl. erforderlich gewesen wären, wenn man iedem von den aufgenommenen Hausarmen nur den vierten Theil von dem hätte geben wollen, was einer der ersten sechs Hausarmen, für welche die Collecte eigentlich gesammelt wurde, würde bekommen haben, wenn man ihre Anzahl nicht vermehrt hätte. Wie viel betrug der Antheil eines der anfänglichen sechs Hausarmen? Wie groß war die Anzahl der Hausarmen, unter welche die Collecte wirklich vertheilt wurde? Wie viel betrug die Collecte? Wie viele Hausarme wurden abgewiesen?

Auflösung.

Es sey der Antheil, den einer der 6 anfänglichen Hausarmen würde bekommen haben, wenn keine dazu wären angenommen worden $= x$, und $y =$ der Anzahl Hausarmen, unter welche die Collecte wirklich vertheilt wurde, so ist die Collecte $= 6x$.

Nun bekam ein Hausarmer 5 fl. die y Hausarmen bekamen also $5y$ fl.

Folglich ist $5y = 6x$ daher $y = \frac{6x}{5}$.

Hätte einer den vierten Theil von x bekommen, so hätten die y Hausarmen $\frac{1}{4}xy$ fl. bekommen,

men, da diese Summe aber 3000 fl. betragen hätte,

so ist $\frac{xy}{4} = 3000$

oder $xy = 12000$

und $y = \frac{12000}{x}$

Weil nun y auch $= \frac{6x}{5}$ so ist $\frac{6x}{5} = \frac{12000}{x}$

also $6x = \frac{60000}{x}$

folglich $6x^2 = 60000$

und $x^2 = 10000$

daher $x = \pm\sqrt{10000}$

d. i. $x = \pm 100$

In diesem Fall kann der negative Werth von x nicht gebraucht werden, also ist x blos $= 100$, folglich da $y = \frac{6x}{5}$, so ist $y = 120$, ferner ist $6x = 600$.

Also betrug die Collecte 600 fl., einer der anfänglichen sechs Hausarmen hätte 100 fl. erhalten, und unter 120 Hausarme wurde die Collecte wirklich vertheilt. Von diesen 120 Hausarmen, die 6 anfänglichen abgerechnet, bleiben 114, so viele wurden abgewiesen.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

112) Jemand hatte eine Stiftung für 12 Arme gemacht. Nun melden sich aber so viele, daß wenn man die Stiftung unter sie austheilen wollte, ieder nur 2 fl. bekommen würde; wollte man aber iedem so viel geben, als einer der 12 Armen

Armen bekommt, so würden 864 fl. dazu erfordert. Wie groß war der Antheil eines der 12 Armen, und wie viele meldeten sich? Antw. Der Antheil eines der 12 Armen war 12 fl. und 72 Arme meldeten sich.

Zweite Aufgabe.

Einige Personen, die in einem Wirthshaus eine Gastung gehalten hatten, fragten nach der Zeche. Der Wirth sagte, sie beträgt nicht viel, denn wenn ich von iedem so viele Zwölfer erhalte, als Personen da sind, so ist alles in Richtigkeit gebracht. Als die Zeche auf diese Art bezahlt wurde, erhielt der Wirth 45 fl. Aus wie vielen Personen bestand die Gesellschaft?

Auflösung.

Die Anzahl der Personen sey $= x$. Bezahlt nun einer x Zwölfer, so bezahlen die x Personen x mal x Zwölfer. Aber $x$mal x ist so viel als x^2, und 45 fl. machen 225 Zwölfer,

$$\text{also ist } x^2 = 225$$
$$\text{also } x = \pm\sqrt{225}$$
$$\text{d. i. } x = \pm 15$$

Der negative Werth von x ist hier nicht zu gebrauchen, also ist $x = 15$, oder es waren 15 Personen.

Aehn-

Aehnliches Exempel zur Uebung.

113) Mehrere Personen haben 15 fl. verzehrt, und ieder trug zur Zeche so viele Kreutzer bei, als Personen waren. Wie viel hat ieder bezahlt? Antw. 30 Kr.

B. Von den unreinen oder gemischten quadratischen Zahlengleichungen.

§. 36. Es werde der Ausdruck $x + 6$ mit sich selbst multiplicirt, so muß der ganze Multiplicand $x + 6$ mit iedem Theil des Multiplicators, nehmlich sowohl mit x als mit 6 multiplicirt werden. Z. B.

$$\begin{array}{r} x + 6 \\ x + 6 \\ \hline + 6x + 36 \\ x^2 + 6x \qquad \\ \hline x^2 + 12x + 36 \end{array}$$

Alsdann ist $x^2 + 12x + 36$ das Quadrat von $x + 6$, folglich $x + 6$ die Quadratwurzel von $x^2 + 12x + 36$.

§. 37. Vergleicht man dieses Quadrat mit seiner Quadratwurzel, die aus zwei Theilen besteht, wovon x der erste und 6 der zweite ist, so sieht man, daß solches aus drei Theilen besteht. Nemlich 1) aus x^2, 2) aus $12x$ und 3) aus 36. Der erste Theil x^2 ist das Quadrat von x dem ersten Theil der Quadratwurzel, der zweite Theil $12x$ ist ein Product aus dem Doppelten des zwei-

ten Theils 6 der Quadratwurzel in den ersten Theil x derselben, und der dritte Theil 36 ist das Quadrat von 6, oder das Quadrat des zweiten Theils der Quadratwurzel.

§. 38. Gesetzt nun, es käme der Ausdruck vor $x^2 + 12x$, so ist dieser kein vollständiges Quadrat, weil solches aus drei Theilen bestehen muß, doch läßt er sich zu einem vollständigen Quadrat machen; wenn man den dritten Theil als Ergänzung des Quadrats hinzufügt.

§. 39. Diese Ergänzung muß aber so beschaffen seyn, daß sie als Quadrat des zweiten Theils der Quadratwurzel betrachtet werden kann. Da nun in dem Ausdruck $x^2 + 12x$ die Zahl 12 als Coefficient von x, das Doppelte dieses nehmlichen zweiten Theils der Quadratwurzel ist, so darf man diese Zahl nur halbiren, um den zweiten Theil 6 der Quadratwurzel zu bekommen.

§. 40. Wenn man alsdann diesen halben Coefficienten 6 aufs Quadrat erhebt, so ist solches die verlangte Ergänzung, addirt man solche hierauf zu $x^2 + 12x$, so erhält man $x^2 + 12x + 36$, welcher Ausdruck ein vollständiges Quadrat, wovon die Quadratwurzel $x + 6$ ist.

§. 41. Es sey irgend ein anderer Ausdruck von ähnlicher Form gegeben, z. B.

$$x^2 + 20x$$

welcher kein vollständiges Quadrat ist, und es werde verlangt, daß man solches ergänzen solle,

so

so verfahre man auf ähnliche Art, wie vorhin. Man nehme nemlich 20 als den Coefficienten von x, und halbire ihn, sodann erhebe man diese Hälfte aufs Quadrat, so hat man die Ergänzung $= 100$. Nun addire man solche zu $x^2 + 20x$,

so erhält man $x^2 + 20x + 100$

welches ein vollständiges Quadrat ist. Denn die Quadratwurzel davon ist $x + 10$, oder die Summe von x und der Hälfte des Coefficienten 20.

§. 42. Es sey ferner folgender Ausdruck gegeben $x^2 + 5x$

soll dieses Quadrat ergänzt werden, so nehme man 5 als den Coefficienten von x, und halbire solchen, so hat man $2\frac{1}{2}$, dann erhebe man $2\frac{1}{2}$ aufs Quadrat, so giebt dieß $6\frac{1}{4}$ zur Ergänzung des Quadrats, und folglich wird $x^2 + 5x + 6\frac{1}{4}$ ein vollständiges Quadrat seyn, wovon die Quadratwurzel $x + 2\frac{1}{2}$ ist.

§. 43. Doch wird man in diesem Fall, um die Bruchrechnung zu ersparen, bequemer so verfahren. Man wird 5 als den Coefficienten von x nicht wirklich halbiren, sondern diese Operation blos andeuten, d. h. man wird schreiben $\frac{5}{2}$, sodann diesen Bruch aufs Quadrat erheben (§. 16.) dieses ist $\frac{25}{4}$, und diese Ergänzung zu dem Ausdruck $x^2 + 5x$ addiren, so hat man

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4}$$

welches ein vollständiges Quadrat ist. Denn die Quadratwurzel davon ist $x + \frac{5}{2}$.

§. 44. Hätte in einem von diesen Ausdrücken, das Glied, in welchem x vorkommt, das Zeichen — vor sich, so würde man eben so verfahren, wie vorhin, um das Quadrat zu ergänzen. In der Quadratwurzel aber würde man vor dem halben Coefficienten gleichfalls das Zeichen — setzen müssen. Z. B. $x^2 - 20x$ soll ergänzt werden, so ist die Ergänzung wie vorhin $= 100$, und wenn diese Ergänzung addirt wird, so entsteht das vollständige Quadrat

$$x^2 - 20x + 100$$

davon ist aber die Quadratwurzel nicht $x + 10$ wie vorhin, sondern $x - 10$.

§. 45. Es sey nun $x^2 - 12x = - 20$ so ist dieses eine unreine quadratische Gleichung. Soll solche aufgelößt werden, so ergänze man das Quadrat $x^2 - 12x$ und addire diese Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung, so wird, (weil Gleiches zu Gleichem addirt wird) die Summe auch eine Gleichung seyn. Nemlich die Ergänzung ist $= 36$ (§. 40.) also ist

$$x^2 - 12x + 36 = 36 - 20$$

oder $x^2 - 12x + 36 = 16$

§. 46. Wenn zwei Quadrate einander gleich sind, so sind auch ihre Quadratwurzeln einander gleich, die Quadratwurzel von $x^2 - 12x + 36$ ist aber $x - 6$, (§. 44.) und von 16 ist sie ± 4. (§. 22.) Folglich ist $x - 6 = \pm 4$.

Dieß

Dieß ist nun eine Gleichung vom ersten Grad, deren Auflösung schon bekannt ist. Man bringt nemlich — 6 auf die andere Seite mit +, so hat man $x = 6 \pm 4$.

Folglich hat x zweierlei Werthe. Denn 4 kann als positiv oder negativ betrachtet werden. Ist es positiv, so ist $x = 6 + 4$, d. i. $x = 10$, ist es negativ, so ist $x = 6 - 4$, d. i. $x = 2$.

Auf diese Art ist also die quadratische Gleichung $x^2 - 12x = -20$ aufgelößt worden. Daß aber die beiden gefundenen Werthe von x richtig sind, läßt sich so zeigen. Man nehme den ersten Werth 10 von x, und erhebe ihn aufs Quadrat, so ist $100 = x^2$, und $x^2 - 12x$ ist $100 - 120$ d. i. -20, wie es die gegebene Gleichung $x^2 - 12x = -20$ erfordert. Nun nehme man auch den zweiten Werth 2 von x, und erhebe ihn aufs Quadrat, so ist $x^2 = 4$, und $x^2 - 12x$ ist $4 - 24$, d. i. gleichfalls -20 wie es die gegebene Gleichung erfordert.

§. 47. Es sey eine quadratische Gleichung $5x^2 + 11x = 22365 - 29x$ welche aufgelößt werden soll. Diese Gleichung muß zuerst geordnet werden, ehe man das Quadrat ergänzen kann.

§. 48. Eine Gleichung heißt geordnet, wenn die unbekannten Größen alle auf der nehmlichen Seite der Gleichung sind, das Quadrat der unbekannten Größe positiv ist, und keinen Coefficienten

cienten hat, oder eigentlich blos 1 zum Coefficienten hat, den x^2 ist so viel als 1 mal x^2 oder als $1x^2$.

§. 49. Um also die Gleichung $5x^2 + 11x = 22365 - 29x$ zu ordnen, bringe man die $- 29x$ als $+ 29x$ auf die andere Seite der Gleichung, so hat man $5x^2 + 40x = 22365$ sodann schaffe man den Coefficienten 5 des x^2 weg, indem man die übrigen Glieder damit dividirt, so hat man $x^2 + 8x = 4473$ Da jetzt die Gleichung geordnet ist, so ergänze man das Quadrat. Die Hälfte des Coefficienten 8 von x ist 4, davon ist das Quadrat 16 die Ergänzung. Also ist

$$x^2 + 8x + 16 = 4473 + 16$$

oder $x^2 + 8x + 16 = 4489$

folglich $x + 4 = \pm \sqrt{4489}$

also $x = - 4 \pm \sqrt{4489}$

Nun ziehe man die Quadratwurzel aus 4489, (§. 8.) diese ist 67

folglich ist $x = - 4 \pm 67$

d. h. $x = + 63$ oder $x = - 71$

Dieses sind die beiden Werthe von x, wovon dießmal nur der eine positiv, der andere negativ ist.

Erste

Erste Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt ein Vermögen von 12600 fl. welches unter seine Kinder gleich vertheilt werden soll. Nun sterben gleich nach seinem Tode auch zwei von seinen Kindern, dadurch fällt iedem der übrigen 400 fl. mehr zu. Wie viele Kinder hatte dieser Mann bei seinem Tode?

Auflösung.

Die Anzahl der Kinder sey = x. Nun sollen unter x Kinder 12600 fl. gleich vertheilt werden, folglich bekommt ein Kind $\frac{12600}{x}$ fl.

Da zwei dieser Kinder sterben, so ist die Anzahl der übrigen noch x — 2, und weil nun unter diese x — 2 Kinder die 12600 fl. gleich vertheilt werden, so bekommt eines

$$\frac{12600}{x-2} \text{ fl.}$$

Da nun dieser Erbtheil um 400 fl. größer ist, als der vorige, d. h. zu dem vorigen 400 fl. hinzukommen müßen, wenn er diesem gleich seyn soll, so ist $\frac{12600}{x} + 400 = \frac{12600}{x-2}$

folglich $12600 + 400x = \frac{12600x}{x-2}$

also $(12600 + 400x)(x-2) = 12600x$

Man multiplicire nun wirklich 12600 + 400x mit x — 2, nemlich 12600 + 400x zuerst mit

x und dann mit -2, und beobachte die im §. 28. gegebenen Regeln, so erhält man

$$12600x + 400x^2 - 25200 - 800x = 12600x$$

folglich ist:

$$400x^2 + 12600x - 12600x - 800x = 25200$$

d. i. $400x^2 - 800x = 25200$

also $x^2 - 2x = 63$

Da nun diese quadratische Gleichung geordnet ist, so ergänze man das Quadrat (§. 39 und 40.) so erhält man $x^2 - 2x + 1 = 63 + 1$

oder $x^2 - 2x + 1 = 64$

(§. 46.) also $x - 1 = \pm \sqrt{64}$

folglich $x = 1 \pm 8$

oder $x = 9$

Der zweite Werth von x, nemlich -7 ist hier nicht zu gebrauchen.

Es waren also 9 Kinder bei des Vaters Tode.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

114) Eine Gesellschaft hat 144 fl. zu bezahlen. Zwei davon sind außer Stand gesetzt zu zahlen, daher muß ieder von den übrigen einen Gulden mehr bezahlen. Aus wie viel Personen bestund die Gesellschaft? Antw. Aus 18 Personen.

115) Ein wohlthätiger Mann bestimmt 30 fl. zur gleichen Vertheilung unter die Armen einer kleinen Stadt. Da dieses Geld erst nach einiger

Zeit

Zeit vertheilt wurde, so fand es sich, daß 10 von denen, welchen diese Wohlthat bestimmt war, solche nicht mehr bedurften. Dadurch fiel nun jedem der übrigen 6 Kr. mehr zu. Wie viele Arme waren es anfänglich? Antw. 60.

Zweite Aufgabe.

Ein Handelsmann kauft ein Stück Zeug, für einen gewissen Preis. Nach einiger Zeit verkauft er es wieder für 375 fl., und gewinnt dabei so viel Procent, als der zwölfte Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie theuer hat er es eingekauft?

Auflösung.

Der Einkaufspreis sey $= x$ fl., so ist der zwölfte Theil davon $\frac{x}{12}$.

Nun verhält sich $100 : \frac{x}{12} = x : \frac{x^2}{1200}$

Ferner ist $\frac{x^2}{1200} + x = 375$

also $x^2 + 1200x = 450000$

folglich wenn man das Quadrat ergänzt, (§. 40.)

$x^2 + 1200x + 360000 = 450000 + 360000$

d.i. $x^2 + 1200x + 360000 = 810000$

daher, wenn man die Quadratwurzel auszieht,

$x + 600 = \pm \sqrt{810000}$

also $x = -600 \pm \sqrt{810000}$

d. i. $x = -600 \pm 900$

oder $x = 300$

Der

Der zweite Werth von x ist — 1500, der, weil er negativ ist, hier nicht gebraucht werden kann.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

116) Jemand verkauft ein Pferd für 144 fl., und gewinnt dabei soviel Procent, als ihm das Pferd beim Einkauf gekostet hat. Wie theuer hat er es gekauft? Antw. Für 80 fl.

117) Ein Kaufmann verkauft eine gewisse Waare für 480 fl., und gewinnt dabei so viel Procent, als der 20ste Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie theuer hat er sie gekauft? Antw. Für 400 fl.

118) Von einer gewissen Waare wird das Pfund in Hamburg für 6 Mark 10ß 3₰., und zwar mit so viel Procent Gewinn verkauft, als es beim Einkauf kostete. Wie theuer kam das Pfund beim Einkauf zu stehen? Antw. $6\frac{1}{4}$ Mark.

Dritte Aufgabe.

Ein Kaufmann bekommt von einem seiner Correspondenten den Auftrag, eine Partie Caffee für ihn einzukaufen. Er glaubt aber, weil der Preis des Caffees eben im Steigen ist, dieses vorher seinem Correspondenten melden zu müßen, doch giebt er ihm zugleich den Rath, den Einkauf demohngeachtet vollziehen zu lassen. Allein er

er erhält zur Antwort, mit solchem bis auf weitere Verordnung zu warten. Nach 14 Tagen meldet er nun seinem Correspondenten, daß der Preis des Caffee's noch beträchtlicher gestiegen sey, und fügt hinzu; "der Centner ist seit dieser „Zeit um 18 fl. aufgeschlagen, so daß die ver„langte Quantität 2295 fl. zu stehen kommt. Vor „14 Tagen aber hätten Sie für dieses Geld zwei „Centner mehr bekommen.„ Nun ist die Frage, wie viele Centner der Correspondent bestellt hat?

Auflösung.

Die Anzahl der bestellten Centner sey $= x$, so ist der leztere Preis eines Centner $\frac{2295}{x}$ fl., der um 14 Tage frühere Preis eines Centners ist $\frac{2295}{x+2}$ fl.

Dieser frühere Preis eines Centners ist aber um 18 fl. geringer als der leztere. Also ist

$$\frac{2295}{x+2} = \frac{2295}{x} - 18$$

folglich $\frac{2295x}{x+2} = 2295 - 18x$

und $2295x = 2295x - 18x^2 + 4590 - 36x$

daher $18x^2 + 36x = 4590$

also $x^2 + 2x = 255$

folglich wenn man das Quadrat ergänzt

$$x^2 + 2x + 1 = 256$$

und

und wenn man die Quadratwurzel auszieht

$$x + 1 = \pm \sqrt{256}$$

folglich $x = -1 \pm \sqrt{256}$

d. i. $x = -1 \pm 16$

oder $x = 15$

Der andere Werth von x, der -17 ist, kann, weil er negativ ist, hier nicht gebraucht werden. Also hat der Correspondent 15 Centner bestellt. Von diesen kostete ein Centner 153 fl. Vierzehn Tag früher hat aber der Centner nur 135 fl. gekostet, also hätte der Correspondent für 2295 fl. 17 Centner bekommen, oder zwei Centner mehr, als bei dem leztern Preis.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

119) Ein Kaufmann reißte auf die Messe, und kaufte unter andern einige Stücke Tuch, die er bei seinem Commißionär ließ, um sie ihm nachzuschicken. Als der Kaufmann nach Hauße kam, starb er plözlich, und bald darauf schickte der Commißionär 10 Stücke Tuch. Der Sohn des verstorbenen Kaufmanns zweifelt, ob die Anzahl richtig sey, er erinnert sich aber blos, daß sein Vater bei seiner Zurückkunft gesagt hatte, er habe einen sehr wohlfeilen Kauf an Tuch gemacht, denn das Ganze sey ihm 1800 fl. zu stehen gekommen, und wenn er den Handel acht Tage früher gemacht hätte, so würde er noch wohlfeiler haben einkaufen können, weil das Tuch indessen im Preis gestiegen

gestiegen wäre, denn damals würde er für eben das Geld drei Stücke mehr bekommen haben, weil das Stück um 30 fl. wohlfeiler war. Nun ist die Frage, wie viele Stücke der Kaufmann wirklich eingekauft hat? Antwort. Zwölf Stücke.

Vierte Aufgabe.

Zwei Kaufleute legten ein Capital von 2500 fl. zu einem Handel zusammen, der erste hat sein Geld acht Monate stehen, und zieht mit Einlage und Gewinn zusammen 1032 fl., der zweite hat sein Geld nur fünf Monate stehen, und zieht mit Einlage und Gewinn zusammen 1845 fl., wie viel beträgt die Einlage eines ieden?

Auflösung.

Es sey die Einlage des ersten $= x$, des zweiten $= y$, so ist 1) $x + y = 2500$.

Nun sey ferner der Gewinn des ersten $= w$, des zweiten $= z$, so ist

$$2)\ x + w = 1032$$
$$3)\ y + z = 1845$$

folglich, addirt $x + y + w + z = 2877$

davon subtrahirt $x + y = 2500$

so ist $w + z = 377$

Da aber w der Gewinn des ersten, und z der Gewinn des zweiten ist, so ist $w + z$ oder 377 fl. der ganze Gewinn.

Nun

Nun ist aus der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung bekannt, daß wenn man iede Einlage in die dazu gehörige Zeit multiplicirt, (hier x mit 8 und y mit 5) und diese Producte addirt, die Summe davon $(8x + 5y)$ sich zum ersten Product $8x$ verhält, wie der ganze Gewinn zum Gewinn des ersten. Das ist

$$(8x + 5y) : 8x = 377 : w$$

folglich ist $$\frac{3016x}{8x + 5y} = w$$

Es ist aber $y = 2500 - x$. Diesen Werth substituire man für y, so hat man

$$\frac{3016x}{8x + 5(2500 - x)} = w$$

oder $$\frac{3016x}{8x + 12500 - 5x} = w$$

d. i. $$\frac{3016x}{3x + 12500} = w$$

Da aber nach N. 2) $x + w = 1032$, so ist auch

$$w = 1032 - x$$

folglich $$\frac{3016x}{3x + 12500} = 1032 - x$$

daher

$$3016x = 3096x - 3x^2 + 12900000 - 12500x$$

also $$3x^2 + 12420x = 12900000$$

folglich $$x^2 + 4140x = 4300000$$

Da nun die Gleichung geordnet ist, so addire man die Ergänzung des Quadrats, so ergiebt sich

$$x^2 + 4140x + 4284900 = 4300000 + 4284900$$

folglich

folglich $x + 2070 = \pm\sqrt{8584900}$

und $x = -2070 \pm \sqrt{8584900}$

Nun ziehe man die Quadratwurzel aus 8584900, solche ist 2930

also ist $x = -2070 \pm 2930$

oder $x = 860$

Der andere Werth von x, der -5000 ist, kann als negativ hier nicht gebraucht werden.

Nun ist $y = 2500 - x$,

d. i. $y = 2500 - 860$ od. $y = 1640$

Der erste hat also 860 fl. eingelegt, und der zweite 1640 fl.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

120) Zwei legen zu einem gewissen Geschäft 2000 fl. zusammen. Der erste hatte sein Geld 17 Monate stehen, und erhielt mit Einlage und Gewinn zusammen 1710 fl., der zweite hatte sein Geld 12 Monate stehen, und erhielt mit Einlage und Gewinn zusammen 1040 fl. Wie viel beträgt die Einlage eines jeden? Antw. Die Einlage des ersten 1200 fl., und die des zweiten 800 fl.

Fünfte Aufgabe.

Zwei tratten in eine Handlungsgesellschaft, der erste gab dazu 80 fl. und ließ dieses Geld vier Monate in der Handlung, die Einlage des zwei-

zweiten ist unbekannt, man weiß nur so viel, daß er sein Geld drei Monate stehen ließ, und mit Einlage und Gewinn 228 fl. zog, auch daß der ganze Gewinn beider zusammen 204 fl. betrug. Wie groß war die Einlage des zweiten, und sein Gewinn, und wie viel betrug der Gewinn des ersten?

Auflösung.

Es sey die Einlage des zweiten $= x$, und sein Gewinn $= w$, so ist $x + w = 228$. Multiplicirt man die Einlage des ersten mit der dazu gehörigen Zeit, nehmlich 80 mit 4, so ist das Product 320, und multiplicirt man die Einlage x des zweiten, mit der dazu gehörigen Zeit 3, so ist das Product $3x$.

Nach der zusammengesezten Gesellschaftsrechnung verhält sich aber

$$(320 + 3x) : 3x = 204 : w$$

also ist $\frac{612x}{320 + 3x} = w$

Weil nun $x + w = 228$, so ist auch $w = 228 - x$

folglich $\frac{612x}{320 + 3x} = 228 - x$

also $612x = 72960 - 320x + 684x - 3x^2$

daher $3x^2 + 612x + 320x - 684x = 72960$

d. i. $3x^2 + 248x = 72960$

folgl. $x^2 + \frac{248x}{3} = 24320$

Die

Die Ergänzung ist das Quadrat von $\frac{124}{3}$ d. i. $= \frac{15376}{9}$

also ist $x^2 + \frac{248x}{3} + \frac{15376}{9} = 24320 + \frac{15376}{9}$

d. i. $x^2 + \frac{248x}{3} + \frac{15376}{9} = \frac{218880}{9} + \frac{15376}{9}$

oder $x^2 + \frac{248x}{3} + \frac{15376}{9} = \frac{234256}{9}$

folgl. $x + \frac{124}{3} = \pm \sqrt{\frac{234256}{9}}$

und $x = -\frac{124}{3} \pm \frac{484}{3}$

oder $x = \frac{360}{3}$

d. i. $x = 120$

Dies 120 subtrahirt von 228, geben 108 fl. zum Gewinn des zweiten, und da der ganze Gewinn 204 fl. beträgt, so subtrahire man 108 von 204, so ist der Rest 96 fl. der Gewinn des ersten.

Aehnliches Exempel zur Uebung.

121) Zwei tretten in eine Handlungsverbindung, die Einlage des ersten beträgt 200 fl., welche fünf Monate lang stehen, der zweite läßt seine Einlage zwei Monate stehen, und zieht mit Einlage und Gewinn zusammen 450 fl. Der Gewinn beider zusammen beträgt 400 fl. Es fragt sich, wie groß die Einlage des zweiten war, und sein Gewinn, und wie viel der Gewinn des ersten betrug? Antw. Die Einlage des zweiten beträgt 300 fl., sein Gewinn 150 fl. und der Gewinn des ersten 250 fl.

Sechste Aufgabe.

Zwei Handelsleute verkaufen auf einer Messe eine gewisse Anzahl Ellen Tuch, und zwar der zweite 10 Ellen mehr als der erste, und lößen zusammen 740 fl. Da sie miteinander von ihrem Verkauf sprechen, sagte der zweite, du bist immer glücklich in Deinen Geschäften, hätte ich Dein Tuch gehabt, so würde ich nicht mehr als 325 fl. daraus gelößt haben. Vom Glück kommt das nicht, antwortete der erste, sondern weil Du immer Deine Waare schnell an den Mann zu bringen suchst, so verkaufst Du zu wohlfeil; hätte ich nur Dein Tuch gehabt, baare 420 fl. solltest Du jezt dafür in Deiner Kasse haben. Nun fragt sich, wie viele Ellen ieder hatte, und wie theuer ieder die Elle von seinem Tuch verkaufte?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Ellen des ersten $= x$, so ist die Anzahl der Ellen des zweiten $= x + 10$. Da nun der erste 420 fl. gelößt haben würde, wenn er die $x + 10$ Ellen des zweiten gehabt hätte, so kann man leicht finden, was er aus seinen x Ellen lößte; denn es verhält sich

$$x + 10 : x = 420 : \frac{420x}{x+10}$$

Auf ähnliche Art, da der zweite 325 fl. gelößt haben würde, wenn er die x Ellen des ersten gehabt hätte, kann man auch finden, was der zweite

aus

aus seinen $x + 10$ Ellen lößte. Denn es verhält sich

$$x : x + 10 = 325 : \frac{325\,(x + 10)}{x}$$

Da nun beide zusammen 740 fl. lößten, so hat man die Gleichung

$$\frac{420x}{x + 10} + \frac{325\,(x + 10)}{x} = 740$$

daher $\frac{420x^2}{x + 10} + 325x + 3250 = 740x$

folglich $\frac{420x^2}{x + 10} - 415x = -3250$

also $420x^2 - 415x^2 - 4150x = -3250x - 32500$

daher $420x^2 - 415x^2 - 900x = -32500$

d. i. $5x^2 - 900x = -32500$

folglich $x^2 - 180x = -6500$

Ergänzt man nun das Quadrat, so ist

$$x^2 - 180x + 8100 = -6500 + 8100$$

oder $x^2 - 180x + 8100 = 1600.$

Wenn man hierauf die Quadratwurzel auszieht, so ist

$$x - 90 = \pm 40$$

folglich $x = 90 \pm 40$

Nimmt man nun den positiven Werth von 40, so ist $x = 130$. Nimmt man aber den negativen Werth von 40, so ist $x = 50$. Also hat hier x zwei positive Werthe, nemlich 130 und 50, d. h. der erste hatte entweder 130 Ellen oder 50 Ellen, und der zweite $x + 10$, d. h. entweder 140 oder 60 Ellen.

Es sey nun $\frac{420x}{x + 10} = w$ und $\frac{325\,(x + 10)}{x} = z$.

Von x hängt also die Bestimmung der Werthe von w und z ab, folglich hat auch iede von diesen Grössen zweierlei Werthe. Ist nemlich $x = 130$, so findet man $w = 390$. Ist aber $x = 50$, so findet man $w = 350$.

Eben so, wenn $x = 130$, so ist $z = 350$, und ist $x = 50$, so ist $z = 290$. Es hat also der erste eine Elle um 3 fl. verkauft, und der andere um $2\frac{1}{2}$ fl., oder im zweiten Falle der erste eine Elle um 7 fl. und der andere um $6\frac{1}{2}$ fl.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

122) Ein Paar Krämer verkaufen Zeug, der zweite 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 fl. Der erste sagt zum zweiten, aus Deinem Zeug hätte ich 24 fl. gelößt. Der zweite antwortete: Ich aus dem Deinigen $12\frac{1}{2}$ fl. Wie viele Ellen hatte ieder? Antw. Entweder der erste 15 und der zweyte 18, oder der erste 5 und der zweite 8 Ellen.

123) Zwei Modehändlerinnen hatten zusammen 372 Ellen Bänder auf die Messe gebracht, die erste zwar mehr als die andere, aber von der nemlichen Sorte, und die, welche weniger hatte, gab die ihrigen etwas theurer. Da sie nun solche alle verkauft hatten, und fanden, daß sie beide gleichviel gelöst hatten, so sagte die erste, hätte ich so viele Bänder, als Sie, gehabt, so hätte

hätte ich nur 90 fl. daraus gelößt, die andere antwortete, hätte ich nur so viele, wie Sie gehabt, ich würde gerade 102 fl. 24 Kr. daraus gelöset haben. Wie viele Bänder hat iede verkauft? Antw. Die erste hatte 192 Ellen, die andere 180 Ellen, und iede lößte 96 fl.

Siebenter Abschnitt.

Von der Buchstabenrechnung.

§. 1.

Bey der Buchstabenrechnung gebraucht man Buchstaben statt der Ziffern. Ein Buchstabe kann iede beliebige Zahl bedeuten. Eine Größe, die durch einen Buchstaben bezeichnet wird, heißt eine **Buchstabengröße**.

§. 2. Buchstabengrößen können unter gewissen Bedingungen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden, auch lassen sich noch andere Rechnungsoperationen damit vornehmen.

§. 3. Die Zahlen, womit die Buchstabengrößen multiplicirt sind, heißen Coefficienten derselben. Z. B. Wenn der Ausdruck 6a vorkommt, so ist 6 der Coefficient von a.

§. 4. Buchstabengrößen, bei denen die Buchstaben einerlei und nur die Coefficienten verschieden sind, heißen: **Größen von einerlei Aus-**

druck. Z. B. 7a und 5a, oder 16b und 14b, oder 28c und 3c, oder 5ab und 6ab, oder 10mn und 9mn.

§. 5. Buchstabengrößen, bei denen die Buchstaben verschieden sind, heißen: Größen von verschiedenem Ausdruck. Z. B. 8b und 5a, oder 16c und 16d, oder 3ab und 5cd.

§. 6. Steht ein Buchstabe allein, z. B. a, oder b, so ist sein Coefficient 1. Das heißt: a ist so viel als einmal a oder 1a, und b so viel als einmal b oder 1b, und ab so viel als einmal ab oder 1ab.

Erste Aufgabe.

Buchstabengrößen zu addiren.

Auflösung.

1) Wenn sie von verschiedenem Ausdruck sind, so deutet man die Addition blos durch das Zeichen + an. Z. B. Wenn 5a und 8b addirt werden sollen, so ist ihre Summe 5a + 8b. Sollen 3a, 7b und 10c addirt werden, so ist ihre Summe 3a + 7b + 10c.

2) Wenn sie von einerlei Ausdruck sind, so addirt man ihre Coefficienten, und setzt den Buchstaben zur Summe. Z. B. 5a + 8a giebt 13a, ferner 7a + 8a + 10a giebt 25a, ferner 6b + 4b + 11b giebt 21b, ferner 7mn und 8mn giebt 15mn, ferner ab und ab giebt 2ab.

3) Wenn

3) Wenn die Größen von einerlei Ausdruck einstimmig sind, das heißt einerlei Zeichen vor ihnen stehen, so werden sie gleichfalls addirt, und das Zeichen, das vor den Größen steht, auch vor die Summe gesetzt. Z. B. Wenn + 7a und + 8a addirt werden sollen; so ist die Summe + 15a, eben so, wenn + 10b und + 25b addirt werden sollen, so ist die Summe + 35b. Ferner wenn — 12a und — 8a addirt werden sollen, so ist ihre Summe — 20a.

4) Wenn die Größen von einerlei Ausdruck entgegengesetzt sind, das heißt, verschiedene Zeichen vor ihnen stehen, so wird der kleinere Coefficient vom größern subtrahirt, zum Rest der Buchstabe gesetzt, und vor diesem Ausdruck das Zeichen, das sich vor der Größe befindet, die den größern Coefficienten hat. Dieß Verfahren gründet sich auf das, was im dritten Abschnitt, vom §. 10. bis §. 12. S. 66. gesagt worden ist. Z. B. Wenn + 12a und — 5a addirt werden sollen, so ist ihre Summe + 7a, ferner wenn — 13a und + 9a addirt werden sollen, so ist ihre Summe — 4a. Ferner wenn + 30b und — 18b addirt werden sollen, so ist ihre Summe + 12b, und wenn — 24b und + 10b addirt werden sollen, so ist ihre Summe — 14b. Ferner wenn + 3a und — 3a addirt werden sollen, so ist ihre Summe Null. (Dritter Abschnitt, §. 23.)

§. 7. Eine Buchstabengröße heißt zusammengesetzt, wenn sie aus mehrern Gliedern besteht,

die durch die Zeichen $+$ oder $-$ miteinander verbunden sind. Z. B. $7a + 3b - 6c$ als eine einzige Grösse betrachtet, heißt eine zusammengesetzte Grösse.

Zweite Aufgabe.

Zusammengesetzte Buchstabengrößen zu addiren.

Auflösung.

Man setze die Grössen von einerlei Ausdruck untereinander, und verfahre dann nach der Auflösung der ersten Aufgabe.

Z. B. Zu $7a + 3b - 6c$ soll addirt werden $5a - 8b + 2c$, so setze man sie so untereinander

$$\begin{array}{r} 7a + 3b - 6c \\ 5a - 8b + 2c \\ \hline \end{array}$$

so ist die Summe $12a - 5b - 4c$

Es ist hiebei zu bemerken, daß wenn das erste Glied linker Hand, hier $7a$ und $5a$ kein Zeichen vor sich hat, solches als positiv betrachtet wird, oder es ist eben so viel, als wenn es das Zeichen $+$ vor sich hätte. Ist es aber negativ, so darf das Zeichen $-$ vor demselben nicht weggelassen werden.

Es soll zu $14a + 28b - 12c + 36d - 8e$ addirt werden $7a - 13b + 18c + 10d - 6e$.

Also
$$\begin{array}{r} 14a + 28b - 12c + 36d - 8e \\ 7a - 13b + 18c + 10d - 6e \\ \hline \end{array}$$

Summe $21a + 15b + 6c + 46d - 14e$

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Was ist die Summe, wenn zu $20m + 30n - p + 18q$ addirt wird, $14m - n + p - 68q$. Antwort. $34m + 29n - 50q$.

2) Was ist die Summe, wenn zu $-80f + 6g - 100h + 40k - 3m + 7n$ addirt wird $30f - 5g - 30k + 10m - 9n$? Antwort. $-50f + g - 100h + 10k + 7m - 2n$.

Dritte Aufgabe.

Buchstabengrößen zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Wenn sie von verschiedenem Ausdruck sind, so deutet man die Subtraction blos an, indem man das Zeichen — zwischen die Größen setzt, und zwar setzt man den Subtrahend rechter Hand. Z. B. Wenn 5b soll von 5a abgezogen werden, so deutet man dieß so an, $6a - 5b$, und ließt es 6a weniger 5b. Eben so, $8c - 7d$ bedeutet, daß 7d von 8c soll subtrahirt werden.

2) Wenn die Größen von einerlei Ausdruck sind, so befolge man die Regel, die im §. 16. des dritten Abschnitts gegeben wurde. Nemlich: Man verwandle das Zeichen, das vor der abzuziehenden Größe steht, in das entgegengesetzte, und verfahre dann nach den Regeln der Addition, d. h. wenn sie alsdann einerlei Zeichen haben, addire

addire man sie wirklich, und setze das Zeichen, das vor den beiden Größen steht, auch vor die Summe; haben sie aber alsdann verschiedene Zeichen, so subtrahire man den kleinen Coefficienten vom größern, setze zum Rest den Buchstaben, und vor dem Rest das Zeichen, welches vor der Größe steht, die den größern Coefficienten hat. Z. B. Wenn von + 8a zu subtrahiren ist + 5a, so verfahre man so:

$$\begin{array}{r} +\ 8a \\ \pm\ 5a \\ \hline +\ 3a \end{array}$$

Hier ist bei dem Subtrahend + 5a, das Zeichen + in — verwandelt, und dann nach den in N. 4. der vorigen ersten Aufgabe gegebenen Regeln der Addition verfahren worden. Weil nemlich + 8a und — 5a verschiedene Zeichen haben, so wurde 5 von 8 subtrahirt, zum Rest 3 der Buchstabe a gesetzt, und vor 3a das Zeichen +, weil solches vor der Größe steht, (vor 8a) die den größern Coefficienten hat.

Ferner es soll von + 12a subtrahirt werden — 7a.

$$\begin{array}{r} +\ 12a \\ -\ \ 7a \\ + \quad\ \\ \hline +\ 19a \end{array}$$

Der Subtrahend — 7a ist hier in + 7a verwandelt, und weil alsdann die beiden gegebenen

nen Größen einerlei Zeichen haben, wirklich addirt worden.

Der Grund dieses Verfahrens ist im dritten Abschnitt, vom §. 14. bis §. 16. angegeben worden.

Vierte Aufgabe.

Zusammengesetzte Buchstabengrößen zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setze die Größen von einerlei Ausdruck untereinander, und verfahre übrigens, wie in der Auflösung der vorigen dritten Aufgabe gezeigt wurde.

Z. B. Es soll von $18a - 13b + 6c - 14d$ subtrahirt werden, $12a + 13b + 4c - 8d$.

Berechnung.

$$\begin{array}{lrrrr} & 18a & - 13b & + 6c & - 14d \\ & 12a & + 13b & + 4c & - 8d \\ & - & - & - & + \\ \hline \text{Rest} & 6a & - 26b & + 2c & - 6d \end{array}$$

Ferner, es soll von $32a + 18b - 7d + 38f - g$ subtrahirt werden $5a + 10b - 4c + 9d - 16f - 7g$.

Berech-

Berechnung.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
32a & + 18b & & - 7d & + 38f & - g \\
5a & + 10b & - 4c & + 9d & - 16f & - 7g \\
- & - & + & - & + & + \\
\hline
27a & + 8b & + 4c & - 16d & + 54f & + 6g
\end{array}
$$

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Was ist der Rest, wenn von 16m − 13n + 36p − 2r + 5t subtrahirt wird 14m − 12n − 14p + 10r + 5t. Antw. 2m − n + 50p − 12r.

2) Was ist der Rest, wenn von − 30a + 17b + 10c − 6d − 11f + 54g subtrahirt wird 14a − 14b + 13c − 14d + 7f − 37g. Antw. − 44a + 31b − 3c + 8d − 18f + 91g.

3) Was ist der Rest, wenn von 72h − 2k − m + 82n − 64p + 2q subtrahirt wird − 13h − 7k + m + 14n − 15p − 31q. Antw. 85h + 5k − 2m + 68n − 49p + 33q.

Fünfte Aufgabe.

Buchstabengrößen zu multipliciren.

Auflösung.

1) Die Buchstaben selbst werden neben einander gesetzt. Z. B. Wenn a mit b soll multiplicirt werden, so wird das Product bezeichnet ab Eben so, wenn der Ausdruck cd vorkommt, so deutet er an, daß c mit d soll multiplicirt werden.

2) Die

2) Die Coefficienten der Buchstabengrößen werden mit einander multiplicirt. Z. B. Wenn 7a mit 6b multiplicirt werden soll, so ist das Product 42ab, ferner wenn 8h mit 4m zu multipliciren sind, so ist das Product 32hm.

3) Wenn angedeutet wird, daß eine zusammengesetzte Größe mit einer andern multiplicirt werden soll, so wird die zusammengesetzte Größe in eine Parenthese eingeschloßen. Z. B. $(a + 3b - c)d$ bedeutet, daß $a + 3b - c$ mit der Größe d multiplicirt werden soll; ferner $(2m - n + 6q)(3f - 2h)$ deutet an, daß $2m - n + 6q$ mit $3f - 2h$ zu multipliciren ist.

4) Es ist bekannt, daß Multiplicand und Multiplicator die Factoren des Products heisen. Wenn nun diese Factoren die Zeichen + oder — vor sich haben, so befolge man die Regel, welche im sechsten Abschnitt, im §. 28. S. 169. gegeben wurde. Haben nemlich beyde Factoren einerlei Zeichen, so wird vor das Product das Zeichen + gesetzt; haben sie verschiedene Zeichen, so wird vor das Product das Zeichen — gesetzt, oder im ersten Fall ist das Product positiv, im letztern negativ.

Beispiele.

	$+ 8a$		$- 8a$
	$+ 7b$		$- 7b$
Product	$+ 56ab$	Product	$+ 56ab$
	$+ 8a$		$- 8a$
	$- 7b$		$+ 7b$
Product	$- 56ab$	Product	$- 56ab$

Der

Der Grund dieses Verfahrens ist im sechsten Abschnitt vom §. 23. bis §. 27. angegeben worden.

5) Ist der Multiplicand eine zusammengesetzte Grösse, der Multiplicator eine einfache, so muß jedes Glied des Multiplicands mit dem Multiplicator multiplicirt werden.

Z. B.	Multiplicand	$5a + 6b - 7c - 3d$
	Multiplicator	$+ 7f$
	Product	$35af + 42bf - 49cf - 21df$

Ferner:	Multiplicand	$8m - 7n + 3p - 4r$
	Multiplicator	$- 6n$
	Product	$-48mn + 42nn - 18np + 24nr$

6) Sind Multiplicator und Multiplicand zusammengesetzte Grössen, so muß man mit jedem Glied des Multiplicators alle Glieder des Multiplicands multipliciren. Sind ein Paar der Partialproducte von einerlei Ausdruck, so werden sie untereinander gesetzt, und addirt, diejenigen Partialproducte aber, die nicht von einerlei Ausdruck sind, werden beliebig nebeneinander gesetzt.

Z. B.	Multiplicand	$3a - 5b + 6c$
	Multiplicator	$7a - 2b$
		$- 6ab + 10bb - 12bc$
		$21aa + 42ac - 35ab$
	Prod.	$21aa + 42ac - 41ab + 10bb - 12bc$

Aehn-

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Wenn $10a + 34b - 60c$ mit $6b + 5c$ multiplicirt wird, wie ist das Product? Antw. $60ab + 204bb + 50ac - 190bc - 300cc$.

2) Wenn $30c + 15f - 6h$ mit $10c - 8f + 3h$ multiplicirt wird, wie ist das Product? Antw. $300cc - 90cf - 120ff + 30ch + 93fh - 18hh$.

3) Wenn $a + b$ mit $a + b$ multiplicirt wird, wie ist das Product? Antw. $aa + 2ab + bb$.

4) Wenn $a + b$ mit $a - b$ multiplicirt wird, wie ist das Product? Antw. $aa - bb$.

Sechste Aufgabe.

Buchstabengrößen zu dividiren.

Auflösung.

1) Wenn die Größen von verschiedenem Ausdruck sind, so wird die Division blos angedeutet. Man drückt nehmlich den Quotienten wie einen Bruch aus, in welchen der Dividend als Zähler, und der Divisor als Nenner gesetzt wird. Z. B. Wenn a soll mit b dividirt werden, so schreibt man dieses $\frac{a}{b}$. Auf diese Art bedeutet der Ausdruck $\frac{m+n}{c}$ daß $m + n$ mit c soll dividirt werden. Wenn diese Größen mit Coefficienten verbunden sind, und die Coefficienten des Divisors nicht

nicht in den Coefficienten des Divisors aufgehen, oder keinen gemeinschäftlichen Theiler haben, so deutet man gleichfalls die Division blos an Z. B. Wenn 7a mit 3b dividirt werden soll, so schreibt man dieses $\frac{7a}{3b}$. Ausserdem kann man die Coefficienten wirklich dividiren. Z. B. 16a mit 8b dividirt, giebt zum Quotienten $\frac{2a}{b}$ weil 8 in 16 zweimal enthalten ist.

2) Wenn die Grössen von einerlei Ausdruck sind, so kann man wirklich dividiren, denn alsdann geht eine in der andern auf. Z. B. a mit a dividirt, giebt 1, weil die Grösse a in sich selbst einmal enthalten ist. Denn man stelle sich unter a irgend eine Zahl vor, so wird, wenn a mit a dividirt wird, eigentlich diese Zahl mit sich dividirt, und also ist der Quotient 1. Eben so, wenn ab mit ab dividirt wird, so ist der Quotient gleichfalls 1. Wenn aber diese Grössen mit Coefficienten verbunden sind, so dividire man den Coefficienten des Dividends mit dem des Divisors, wenn der letztere im erstern aufgeht, ausserdem, deute man die Division blos an. Z. B. 8a mit 4a dividirt, giebt zum Quotienten 2. Ferner 12b mit 3b dividirt, giebt zum Quotienten 4. Aber 5a mit 3a dividirt, giebt zum Quotienten $\frac{5}{3}$.

3) Wenn die Buchstabengrössen von verschiedenem Ausdruck sind, aber doch gemeinschaftliche Factoren haben, wie z. B. wenn ab mit ac dividirt werden soll, da ab und ac den gemeinschäftlichen

lichen Factor a haben, so hebt sich dieser gemeinschäftliche Factor, und der Quotient ist $\frac{b}{c}$.

4) Wenn die Buchstabengrößen von verschiedenem Ausdruck sind, aber der Divisor ein Factor vom Dividend ist, (z. B. wenn ab mit a soll dividirt werden,) so hebt sich dieser Factor im Dividend weg, und der Quotient besteht aus den andern Factoren des Dividends. Nemlich ab mit a dividirt, giebt zum Quotienten b, (denn a in a ist einmal enthalten, und einmal b ist b) ferner mn mit m dividirt, giebt zum Quotienten n, ferner abc durch b dividirt, giebt zum Quotienten ac, ferner 6cdf mit cd dividirt, giebt zum Quotienten 6f, ferner 32abc mit 8ac dividirt, giebt zum Quotienten 4b, ferner 7cd mit 5c dividirt, giebt zum Quotienten $\frac{7d}{5}$.

5) Wenn Divisor und Dividend + oder — vor sich haben, so muß man Rücksicht darauf nehmen, ob diese Zeichen einerlei oder verschieden sind, wenn nemlich Divisor und Dividend einerlei Zeichen haben, so ist der Quotient positiv, oder er hat das Zeichen + vor sich, wenn aber Divisor und Dividend verschiedene Zeichen haben, so ist der Quotient negativ, oder er hat das Zeichen — vor sich. Z. B.

Divisor	Dividend.	Quot.	Divisor.	Dividend.	Quot.
+ 4a	+ 20ab	+ 5b	— 4a	— 20ab	+ 5b
Divisor	Dividend.	Quot.	Divisor.	Dividend.	Quot.
— 4a	+ 20ab	— 5b	+ 4a	— 20ab	— 5b

Der Beweis dieses Satzes ist im sechsten Abschnitt §. 29. S. 170. gegeben worden.

6) Wenn der Divisor eine einfache Größe, der Dividend aber eine zusammengesetzte Größe ist, so dividire man iedes Glied des Dividends mit dem Divisor.

Erstes Beispiel.

Div.	Dividend.	Quotient.
$+6a$	$+12a - 36ab + 42aa - 18ac$	$+2 - 6b + 7a - 3c$

Zweites Beispiel.

Div.	Dividend.	Quotient.
$-8b$	$-16bb + 32ab + 13bd - 64f$	$+2b - 4a - \frac{13d}{8} + \frac{8f}{b}$

7) Wenn der Divisor gleichfalls eine zusammengesetzte Größe ist, so läßt sich selten die Division verrichten, weil meistens ein Rest bleibt, so daß, wenn dieser als Zähler eines Bruchs, von welchem der Divisor der Nenner ist, zum Quotienten hinzugesetzt wird, dadurch der Quotient sehr zusammengesetzt wird, und folglich, die Berechnung, (wenn man nemlich statt der Buchstaben gewisse Zahlen im Quotienten substituirt,) nicht durch die geschehene Division erleichtert wird. Man deute also in diesem Fall die Division blos an, indem man den Dividend als Zähler eines Bruchs ansetzt, von welchem der Divisor der Nenner ist. Z. B. Wenn $12a + 17b - 18c$ mit $10a - 6b$ dividirt werden soll, so schreibe man

$$\frac{12a + 17b - 18c}{10a - 6b}$$

Doch

Doch will ich hier an einem Beispiel, in dem die Division aufgeht, die Verfahrungsart zeigen.

Divis.	Dividend.	Quotient.
$7a - 2b$	$21aa - 41ab + 42ac + 10bb - 12bc$	$3a - 5b + 6c$
	$21aa \mp 6ab$	
	$0 \quad - 35ab + 42ac + 10bb - 12bc$	
	$- 35ab \qquad + 20bb$	
	$+ \qquad\qquad -$	
	$0 \; + 42ac \qquad 0 \; - 12bc$	
	$+ 42ac \qquad - 12bc$	
	$- \qquad\qquad +$	
	$0 \qquad\qquad 0$	

Man sieht, daß das Verfahren folgendes ist. Wenn die Glieder des Dividends so geordnet worden sind, daß die Buchstaben in der nemlichen Ordnung aufeinander folgen, wie in den Gliedern des Divisors, so dividirt man mit dem ersten Glied $7a$ des Divisors, in das erste Glied $21aa$ des Dividends, mit dem Quotienten $3a$, multiplicirt man hierauf den ganzen Divisor $7a - 2b$, das Product $21aa - 6ab$ subtrahirt man von denienigen Gliedern des Dividends, welche von eben dem Ausdruck sind, (oder man ändert bei der Subtraction die Zeichen der Glieder des Subtrahends und verfährt übrigens wie bei der Addition,) zu dem Rest $- 35ab$ setzt man die übrigen Glieder des Dividends herab, und verfährt wieder wie vorhin, u. s. f.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Was ist der Quotient, wenn $56ab + 49aab - 63abc$ mit $+ 7a$ dividirt wird? Antw. $8b + 7ab - 9bc$.

2) Was ist der Quotient, wenn $35aa - 40am + 30abb - 25ac$ mit $- 5a$ dividirt wird? Antw. $- 7a + 8m - 6bb + 5c$.

3) Was ist der Quotient, wenn $18abc + 27acd - 34acc - 40b$ mit $- 9ac$ dividirt wird? Antw. $- 2b - 3d + \frac{34c}{9} + \frac{40b}{9ac}$.

4) Was ist der Quotient, wenn $70bb + 54bc - 36cc - 47bd + 126cd - 104dd$ mit $5b + 6c - 8d$ dividirt wird? Antwort. $14b - 6c + 13d$.

5) Was ist der Quotient, wenn $3mm - 6mp + 2mn - 5nn + 6np$ mit $3m + 5n - 6p$ dividirt wird? Antw. $m - n$.

6) Was ist der Quotient, wenn $9ccdd - 16aadd$ mit $3cd - 4ad$ dividirt wird? Antw. $3cd + 4ad$.

§. 7. Wenn ein Buchstabenausdruck von der Form $a + \frac{b}{c}$ vorkommt, so kann er auf die Form eines Bruchs gebracht werden, wenn man mit dem Nenner c die Größe a multiplicirt, zum Product den Zähler b addirt, und unter die Summe den Nenner c als gemeinschäftlichen Nenner setzt, so erhält man $\frac{ac + b}{c}$, welcher Ausdruck eben so viel

viel am Werth ist, als $a + \frac{b}{c}$. Denn $\frac{ac + b}{c}$ ist eben so viel als $\frac{ac}{c} + \frac{b}{c}$, aber $\frac{ac}{c}$ giebt a, also ist $\frac{ac}{c} + \frac{b}{c}$ so viel als $a + \frac{b}{c}$.

§. 8. Auf ähnliche Art kann ein Buchstabenausdruck von der Form $a - \frac{b}{c}$ auf die Form $\frac{ac - b}{c}$ gebracht werden.

Anmerkung. So ist z. B. $8\frac{3}{5}$ soviel als $\frac{43}{5}$. Hier wird, um $8\frac{3}{5}$ in den unächten Bruch $\frac{43}{5}$ zu verwandeln, eben so verfahren, wie im §. 7. mit dem Buchstabenausdruck $a + \frac{b}{c}$.

§. 9. Wenn zwei Buchstabenbrüche auf einerlei Benennung gebracht werden, so multiplicire man den Zähler und Nenner eines ieden Bruchs mit dem Nenner des andern. Z. B. Es sollen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Benennung gebracht werden, so multiplicire man mit dem Nenner d den Zähler a und Nenner b des ersten Bruchs, und mit dem Nenner b, den Zähler c und Nenner d des zweiten Bruchs, so erhält man $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$ welche Brüche einerlei Nenner bd haben, und wovon $\frac{ad}{bd}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist, (weil sich der Werth eines Bruchs nicht ändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nehmlichen Zahl mul-

tiplicirt oder dividirt,) und aus eben diesem Grund ist auch $\frac{bc}{bd}$ dem Bruch $\frac{c}{d}$ am Werth gleich.

§. 10. Auf ähnliche Art können auch drei Buchstabenbrüche auf einerlei Benennung gebracht werden. Z. B. Es sollen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ auf einerlei Benennung gebracht werden, so nehme man die Nenner d und g, multiplicire sie mit einander, und mit dem Product dg multiplicire man Zähler und Nenner des ersten Bruchs $\frac{a}{b}$, so erhält man $\frac{adg}{bdg}$ welcher Bruch dem Bruch $\frac{a}{b}$ am Werth gleich ist. Hierauf nehme man die Nenner b und g, und mit ihrem Product bg multiplicire man Zähler und Nenner des zweiten Bruchs $\frac{c}{d}$, so giebt dieß $\frac{cbg}{dbg}$, und endlich multiplicire man mit dem Product bd, der Nenner b und d, Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{f}{g}$, so giebt dieß $\frac{fbd}{gbd}$. Nun haben die drei Brüche $\frac{adg}{bdg}$, $\frac{cbg}{dbg}$, $\frac{fbd}{gbd}$ einerlei Nenner. Denn dbg ist so viel als bdg, und so auch gbd, weil die Factoren eines Products beliebig versetzt werden dürfen, und z. B. 3mal 4mal 6 so viel ist, als 4mal 3mal 6, oder 6mal 4mal 3. Eben so verfährt man auch, wenn mehr als drei Buchstabenbrüche auf einerlei Benennung gebracht werden sollen.

§. 11. Wenn Buchstabenbrüche addirt werden sollen, die alle einerlei Nenner haben, so addire man ihre Zähler. Z. B. $\frac{5a}{b} + \frac{6a}{b} + \frac{3c}{b} = \frac{11a + 3c}{b}$, ferner $\frac{4m}{d} + \frac{6m}{d} + \frac{7m}{d} + \frac{8m}{d} = \frac{25m}{d}$. Wenn aber die Buchstabenbrüche, die addirt werden sollen, verschiedene Nenner haben, so bringe man sie vorher auf einerlei Benennung nach §. 10. Z. B. $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} + \frac{g}{h} = \frac{anh}{bnh} + \frac{mbh}{nbh} + \frac{gbn}{hbn}$, dann addire man die Zähler und setze unter ihre Summe den gemeinschäftlichen Nenner bnh, so erhält man $\frac{anh + mbh + dbn}{bnh}$.

§. 12. Wenn Buchstabenbrüche subtrahirt werden sollen, so verfahre man auf ähnliche Art. Haben sie nemlich einerlei Nenner, so subtrahire man den Zähler des einen von dem des andern. Z. B. $\frac{n}{m} - \frac{p}{m} = \frac{n - p}{m}$, ferner $\frac{7b}{c} - \frac{3b}{e} = \frac{4b}{c}$. Haben sie aber verschiedene Nenner, so bringe man sie zuerst auf einerlei Benennung, nach §. 9. Z. B. $\frac{h}{k} - \frac{m}{n} = \frac{hn}{kn} - \frac{km}{kn}$, oder $= \frac{hn - km}{kn}$.

§. 13. Wenn ein Buchstabenbruch mit einem andern soll multiplicirt werden, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Z. B. Wenn $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ soll multiplicirt werden, so ist das Product $\frac{ac}{bd}$.

§. 14. Wenn ein Buchstabenbruch $\frac{m}{n}$ mit einer Buchstabengröße b soll multiplicirt werden, so multiplicire man blos den Zähler damit. Nemlich, wenn $\frac{m}{n}$ mit b multiplicirt wird, so ist das Product $\frac{mb}{n}$.

§. 15. Wenn hingegen ein Buchstabenbruch $\frac{m}{n}$ mit einer Buchstabengröße b dividirt werden soll, so multiplicire man blos den Nenner damit. Nemlich wenn $\frac{m}{n}$ mit b dividirt wird, so ist der Quotient $\frac{m}{nb}$. Denn wenn der Nenner n mit b multiplicirt wird, so wird das Ganze in bmal mehr Theile getheilt, folglich werden die Theile auch bmal kleiner. Von diesen bmal kleinern Theilen werden aber nicht mehr genommen als vorher, weil der Zähler m ungeändert bleibt, also ist der Bruch $\frac{m}{nb}$ wirklich bmal kleiner, als der Bruch $\frac{m}{n}$, das heißt der Bruch $\frac{m}{n}$ ist auf diese Art mit b dividirt.

§. 16. Wenn ein Buchstabenbruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Buchstabenbruch $\frac{c}{d}$ dividirt werden soll, so kehre man den Divisor um, und schreibe $\frac{d}{c}$, und damit multiplicire man den Bruch $\frac{a}{b}$, nemlich Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner,

so

so ist $\frac{ad}{bc}$ der verlangte Quotient. Denn man stelle sich vor, die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ seyen auf einerlei Benennung gebracht, so entstehen die Brüche $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$, da nun diese beiden Brüche einerlei Nenner haben, so wird der zweite Bruch im ersten so vielmal enthalten seyn, als sein Zähler bc im Zähler ad, oder man findet dieses, wenn man ad mit bc dividirt, nun ist dieser Quotient, $\frac{ad}{bc}$ ganz der nehmliche, der durch das angegebene Verfahren erhalten wurde.

§. 17. Ein Product von lauter gleichen Buchstabenausdrücken heißt eine Potenz. Z. B. a sey die erste Potenz, so ist a mal a oder aa die zweite Potenz, a mal a mal a, oder aaa die dritte Potenz u. s. f. Statt aa schreibt man gewöhnlich a^2, statt aaa schreibt man a^3 und so ferner. Diese kleine Zahl, welche rechter Hand über den Buchstaben gesetzt wird, heißt der Exponent der Potenz.

§. 18. Wenn verschiedene Potenzen des nehmlichen Buchstabens mit einander sollen multiplicirt werden, so darf man ihre Exponenten blos addiren. Z. B. a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^{3+2} oder a^5. Denn a^3 ist aaa und a^2 ist aa, also a^3 mit a^2 multiplicirt, aaaaa oder a fünfmal als Factor gesetzt, d. i. a^5. So giebt b^6 mit b^5 multiplicirt, b^{11}.

§. 19.

§. 19. Wird nun b^{11} mit b^5 dividirt, so muß wieder b^6 gefunden werden, in diesem Fall darf man also nur den Exponenten 5 vom Exponenten 11 subtrahiren, und den Rest als Exponent über b setzen. So giebt z. B. c^8, dividirt mit c^5, zum Quotienten c^{8-5} oder c^3, ferner a^7 dividirt mit a^5 giebt a^2.

§. 20 Ist der Exponent des Divisors grösser, als der Exponent des Dividenden, so ist der Quotient eine Potenz mit einem negativen Exponenten. Z. B. a^5 dividirt mit a^7 giebt a^{-2} (Denn $5 - 7$ ist so viel als -7 zu $+5$ addirt, die Summe wird also negativ. Dritter Abschnitt, §. 12. S. 66.) Ferner b^3 mit b^4 dividirt, giebt b^{-1}. Ferner c^8 mit c^{11} dividirt, giebt c^{-3}.

§. 21. Wenn also in einer Rechnung eine Potenz mit einem negativen Exponenten vorkommt, so ist leicht einzusehen, was sie bedeutet. Z. B. Es komme der Ausdruck a^{-4} vor. Um dessen Bedeutung zu finden, stelle man sich vor, a^1 soll mit a^5 dividirt werden, so ist der Quotient a^{-4}. Nun ist aber a^1 das a selbst, und a^5 ist aaaaa, wird nun a^1 mit a^5 dividirt, so kann man sich den Quotienten als einen Bruch vorstellen, dessen Zähler a und der Nenner aaaaa ist, d. h. als $\frac{a}{aaaaa}$. Nun läßt sich dieser Bruch mit a heben, und wird alsdann $\frac{1}{aaaa}$ oder $\frac{1}{a^4}$. Das nemliche bedeutet nun die Potenz a^{-4}. Folglich ist eine

Potenz

Potenz mit einem negativen Exponenten allemal ein Bruch, dessen Zähler 1 und der Nenner eben diese Potenz, mit dem nemlichen aber positiven Exponenten ist. So ist z. B. b^{-5} so viel als $\frac{1}{b^5}$. Hätte man also einen gewissen Ausdruck, z. B. c^{-3} zu berechnen, in welchem c die Zahl 10 bedeuten soll, so ist $c^{-3} = 10^{-3}$ und dieses ist $\frac{1}{10^3}$ oder $\frac{1}{10.10.10}$ d. i. $\frac{1}{1000}$.

§. 22. Soll eine Buchstabenpotenz auf eine höhere Potenz erhoben werden, so werden die Exponenten mit einander multiplicirt. Z. B. $(a^5)^2$ giebt a^{10}, ferner $(b^6)^3$ giebt b^{18}. Denn $(a^5)^2$ bedeutet a^5 mit sich, oder mit a^5 multiplicirt, aber a^5 mit a^5 multiplicirt, giebt a^{5+5} d. i. $a^{5 \cdot 2}$ d. i. a^{10}.

§. 23. Bei einer gegebenen Buchstabenpotenz, z. E. a^4 heißt die Größe a, welche, wenn sie so vielmal als Factor gesetzt wird, als der Exponent 4 anzeigt, die Buchstabenpotenz a^4 hervorbringt, eine Wurzel der Potenz. Man gebraucht, um die Wurzeln zu bezeichnen, das Zeichen $\surd$ welches man vor die Potenz setzt. In dieses Wurzelzeichen setzt man eine kleine Zahl, welche andeutet, von welchem Grad die Wurzel ist, das heißt, wie vielmal sie als Factor gesetzt werden muß, um die Potenz hervorzubringen, z. B. $\sqrt[4]{a^4} = a$. Dieses bedeutet, daß a viermal als Factor gesetzt werden muß, um a^4 hervorzubringen,

gen, oder daß a die Wurzel des 4ten Grads von a^4 ist. So bedeutet $\sqrt[3]{a^4} = b$, daß wenn b dreimal als Factor gesetzt wird, das Product $= a^4$ sey, oder daß b die Wurzel des dritten Grads von a^4 sey.

§. 24. Solche Ausdrucke, wie $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[7]{b^2}$, $\sqrt[5]{c}$ u. dgl. heißen Wurzelgrößen.

§. 25. Dergleichen Wurzelgrößen kann man als Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, darstellen. Z. B. $\sqrt[3]{a^4}$ ist eben so viel als $a^{\frac{4}{3}}$, ferner $\sqrt[7]{b^2}$ so viel als $b^{\frac{2}{7}}$. Denn nach dem §. 22. ist $(a^5)^2 = a^{10}$, d. h. a^5 mit sich multiplicirt, giebt a^{10}, folglich wird umgekehrt a^5 gefunden werden, wenn man die Wurzel des zweiten Grads aus a^{10} zieht. Nun entstund der Exponent 10, indem der Exponent 5 von a^5 mit 2 multiplicirt wurde, also wird man a^5 oder $\sqrt[2]{a^{10}}$ finden, wenn man den Exponenten 5 mit dem Exponenten 2 des Wurzelzeichens dividirt. Das ist $\sqrt[2]{a^{10}} = a^{\frac{10}{2}}$.

§. 26. Wenn also in einer Rechnung Potenzen vorkommen, deren Exponenten Brüche sind, so weiß man wie sie zu behandeln sind. Nemlich $a^{\frac{4}{3}}$ ist so viel als $\sqrt[3]{a^4}$, $b^{\frac{2}{7}}$ so viel als $\sqrt[7]{b^2}$, $f^{\frac{9}{5}}$ soviel als $\sqrt[5]{f^9}$. Alle Potenzen nemlich, deren Exponenten Brüche sind, bedeuten Wurzelgrößen,

oder

oder man muß, um ihren Werth zu bestimmen, die Wurzel eines gewissen Grades aus einer gewissen Zahl ausziehen.

§. 27. Oft kommt bei algebraischen Aufgaben ein Buchstabenausdruck vor, den man in seine Factoren zerlegen soll. Dieses ist nun manchmal sehr leicht zu bewerkstelligen. Z. B. Es soll das Product $ab + b^2$ in die Factoren zerlegt werden, so sind solche $a + b$ und b, weil $a + b$ mit b multiplicirt, das Product $ab + b^2$ giebt, oder $ab + b^2$ ist $= (a + b)b$. Eben so ist $ac - bc$ so viel als $(a - b)c$, denn wird $a - b$ mit c multiplicirt, so erhält man wieder $ac - bc$. Ferner $bx + ax$ ist so viel als $(b + a)x$, und $cx - dx + fx$ ist so viel als $(c - d + f)x$. Ferner $6cy - 12dy$ ist so viel als $6(c - 2d)y$.

§. 28. Manchmal ist es schwerer, die Factoren zu entdecken. Z. B. Von dem Product $x^2 - a^2$ sind die Factoren $x + a$ und $x - a$, oder $x^2 - a^2$ ist so viel als $(x + a)(x - a)$. Ferner $x^2 + 2ax + a^2$ ist soviel als $(x + a)(x + a)$. Ferner $x^2 - 2ax + a^2$ ist so viel als $(x - a)(x - a)$. Dieß zeigen die Proben, wenn man die genannten Factoren mit einander multiplicirt.

Achter Abschnitt.

Von den Buchstabengleichungen.

§. 1.

Wenn man den Werth der unbekannten Größe aus einer Buchstabengleichung entwickelt, so findet man einen Ausdruck, der die Regel enthält, nach der alle Aufgaben, aus denen eine solche Gleichung hergeleitet werden kann, aufgelößt werden können. Dieser Ausdruck heißt eine Formel.

Erste Aufgabe.

Jemand kauft eine Waare, und zwar m Stücke um a Geldstücke, und verkauft solche, indem er für n Stücke b Geldstücke erhält, dabei gewinnt er c Geldstücke. Aus wie vielen Stücken bestand seine Waare?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Stücke der Waare = x. Nun verhalten sich

	Stücke		Stücke		Geldst.		Geldst.
beym Einkauf	m	:	x	=	b	:	$\frac{ax}{m}$
und beym Verkauf	n	:	x	=	b	:	$\frac{bx}{n}$

Da

Da nun c Geldstücke gewonnen werden, so ist $\frac{bx}{n} - \frac{ax}{m} = c$.

Dieses ist die Buchstabengleichung, welche aufgelößt werden muß. Die Regeln der Auflösung sind die nehmlichen, wie bei den Zahlengleichungen.

Es ist also $bx - \frac{anx}{m} = cn$

ferner $bmx - anx = cmn$

also (Siebenter Abschn. §. 29.) $(bm - an)x = cmn$

folglich $x = \frac{cmn}{bm - an}$

Dieß ist die Formel, nach der alle ähnliche Aufgaben aufgelößt werden können. Sie heißt nemlich mit Worten ausgedrückt, man multiplicire c, m und n mit einander, ferner multiplicire man b mit m und a mit n, ziehe das letztere Product vom erstern ab, und dividire mit dem Rest das Product cmn.

Man nehme nun die zehnte Aufgabe des zweiten Abschnitts: Jemand kauft ein Stück Leinwand 5 Ellen um 2 fl. 36 Kr., und verkauft sie, indem er 7 Ellen für 4 fl. 42 Kr. giebt, dabei gewinnt er 10 fl. 36 Kr. Wie viele Ellen hielt das Stück? und löse sie vermittelst der Formel auf, indem man die in der Aufgabe befindlichen Zahlen den entsprechenden Buchstaben substituirt. Nemlich in diesem Fall ist $m = 5$, $a = 2$ fl. 36 Kr.

36 Kr., n = 7, b = 4 fl. 42 Kr. und c = 10 fl. 36 Kr. Da nun

$$x = \frac{cmn}{bm - an}$$

so ist, wenn man die Gulden auf Kreutzer reducirt, und die Werthe substituirt

$$x = \frac{636 . 5 . 7}{282 . 5 - 156 . 7}$$

oder $$x = \frac{22260}{1410 - 1092}$$

d. i. $$x = \frac{22260}{318}$$

oder $$x = 70$$

Eben so läßt sich das 23 Exempel berechnen. Jemand kauft ein Stück Tuch, 3 Ellen um 22 fl. und verkauft es, indem er 4 Ellen um 30 fl. giebt. Bei diesem Handel gewinnt er 4 fl. Wie viele Ellen hielt das Stück?

Hier ist m = 3, a = 22, n = 4, b = 30, c = 4, folglich findet man x = 24.

Auf diese Art lassen sich unendlich viele ähnliche Exempel vermittelst dieser Formel berechnen.

Zweite Aufgabe.

Jemand hat c Geldstücke nach Verlauf der Zeit m zu zahlen, er will sogleich baar so viel entrichten, daß ihm der Rest noch die Zeit n über gelassen werde. Wie viel beträgt die baare Zahlung?

Auflö-

Auflösung.

Die baare Zahlung betrage x Geldstücke. Das Procent sey $= k$.

Da 100 in einem Jahr k giebt, so geben c Geldstücke $\frac{kc}{100}$ jährlichen Zins. Folglich in m Monaten $\frac{mkc}{1200}$ Zins.

Da nun x Geldstücke baar bezahlt werden, so ist, wenn man solche von c subtrahirt, der Rest $= c - x$.

Von diesem Rest beträgt der jährliche Zins $\frac{(c-x)k}{100}$ und der n monatliche Zins $\frac{n(c-x)k}{1200}$.

Die beiden Zinse $\frac{mkc}{1200}$ und $\frac{n(c-x)k}{1200}$ müßen nun gleich gesetzt werden. Denn der Schuldner hätte während m Monaten den Zins von c Geldstücken ziehen können, zahlt er aber x Geldstücke baar, so kann er nur den Zins von $c - x$ Geldstücken n Monate lang ziehen. Soll er nun keinen Schaden leiden, so müßen diese Zinse gleich seyn.

Also ergiebt sich die Gleichung $\frac{mkc}{1200} = \frac{n(c-x)k}{1200}$

folglich $mkc = n(c-x)k$

ferner, wenn man mit k dividirt $mc = n(c-x)$

oder $mc = nc - nx$

also $mc + nx = nc$

und $nx = nc - mc$

folglich $x = \frac{nc - mc}{n}$

Zerlegt man den Ausdruck nc — mc in seine Factoren, (Siebenter Abschnitt, §. 29.) so erhält man (n — m)c, also ist $x = \frac{(n-m)c}{n}$.

Das ist die Formel um x zu finden, welche, mit Worten ausgedrückt, so heißt: man subtrahire den ersten Termin m von letztern n, den Rest multiplicire man mit dem Kapital c und das Product dividire man mit dem zweiten Termin n.

Es läßt sich auch diese Formel als Proportionalsatz darstellen, es verhält sich nemlich

$$n : n - m = c : x$$

oder es verhält sich der zweite Termin n, zum Unterschied der beiden Termine, wie das Kapital c zur baaren Zahlung x. Denn wenn man in dieser Proportion den Werth von x bestimmt, so erhält man wieder die Formel. Nemlich die beiden mittlern Glieder mit einander multiplicirt, giebt (n — m)c und dieß Product mit dem ersten Glied dividirt, giebt wieder $\frac{(n-m)c}{n} = x$.

Vermittelst dieser Formel lassen sich alle ähnliche Aufgaben berechnen, z. B. die 16te Aufgabe im zweiten Abschnitt: Es ist iemand 1664 fl. nach 7 Monaten zu zahlen schuldig. Er will sogleich baar so viel zahlen, daß ihm der Rest noch 9 Monate gelassen werde. Wie viel beträgt die baare Zahlung?

Hier

Hier ist $c = 1664$, $m = 7$ und $n = 9$, folglich $x = \frac{(9-7)\,1664}{9}$

oder $x = \frac{2 . 1664}{9}$

d. i. $x = 369\frac{7}{9}$.

Eben so kann auch das 35 Exempel berechnet werden. Wenn iemand nach 5 Monaten 2000 fl. zu bezahlen hat, wie viel muß er sogleich baar zahlen, damit ihm der Rest ein Jahr lang gelassen werde?

Hier ist $c = 2000$, $m = 5$ und $n = 12$, folglich findet man $x = 1166\frac{2}{3}$.

Ferner kann auch das 36 Exempel vermittelst dieser Formel berechnet werden.

Hier ist $c = 850$, $m = 3$, und $n = 7$, folglich $x = 485\frac{5}{7}$.

Und so können eine unendliche Menge ähnlicher Aufgaben vermittelst dieser Formel berechnet werden.

Wenn man in der Formel $x = \frac{(n-m)c}{n}$, den Werth von x als bekannt annimmt, und ihn mit a bezeichnet, den Werth von c aber als unbekannt, und solchen mit y bezeichnet, so ist

$$a = \frac{(n-m)y}{n}$$

Aus dieser Gleichung kann man nun den Werth der unbekannten Größe y entwickeln.

Nemlich $an = (n-m)y$

folglich $\frac{an}{n-m} = y.$

Diese Formel zeigt, wie man das Kapital y berechnen kann, wenn die baare Zahlung a und die Anzahl der Monate n und m bekannt ist, und vermittelst derselben kann man die 17te Aufgabe im zweiten Abschnitt berechnen. Wenn iemand baar 340 fl. zahlt, damit ihm der Rest eines gewissen Kapitals 6 Monate gelassen werde, da er das Kapital selbst nach 2 Monaten hätte bezahlen sollen, wie groß ist das Kapital? Hier ist $a = 340$, $m = 2$ und $n = 6$, folglich findet man nach gehöriger Substitution, $y = 510$.

Eben so kann vermittelst dieser Formel das 37ste Exempel berechnet werden. Hier ist $a = 210$, $m = 5$ und $n = 8$, also $y = 560$.

Auch läßt sich vermittelst dieser Formel das 38ste Exempel, und noch eine unendliche Menge anderer ähnlicher berechnen.

Wenn man ferner in der Formel $x = \frac{(n-m)c}{n}$, den Werth von x als bekannt annimmt, und ihn mit a bezeichnet, den Werth von n aber als unbekannt, und solchen mit z bezeichnet, so ist

$$a = \frac{(z-m)c}{z}$$

folglich $az = (z-m)c$

oder $az = cz - cm$

also $az + cm = cz$

und $cm = cz - az$

oder

oder $cm = (c - a)z$

folglich $\frac{cm}{c - a} = z.$

Dieß ist die Formel, um die Zeit zu finden, nach deren Verlauf der Rest des Kapitals gezahlt werden muß.

Z. B. Jemand hat 560 fl. nach fünf Monaten zu bezahlen, und zahlt 210 fl. baar, nach wie viel Monaten hat er den Rest zu bezahlen? Hier ist $c = 560$, $a = 210$, und $m = 5$, also findet man nach gehöriger Substitution $z = 8$.

Wenn man endlich in der Formel $x = \frac{(n - m)c}{n}$ den Werth von x als bekannt annimmt, und mit a bezeichnet, den Werth von m aber als unbekannt, und solchen mit w bezeichnet,

so ist $a = \frac{(n - w)c}{n}$

folglich $an = (n - w)c$

oder $an = cn - cw$

daher $cw = cn - an$

folglich $w = \frac{cn - an}{c}$

oder $w = \frac{(c - a)n}{c}$

Dieß ist die Formel um die Zeit zu finden, nach deren Verlauf das Kapital gezahlt werden soll. Z. B. Jemand hat 7000 fl. nach einiger Zeit zu bezahlen, er entrichtet 1000 fl. baar, und den Rest nach $3\frac{1}{2}$ Jahren. Nach wie viel Jahren hatte er das Kapital zu zahlen.

Hier ist $c = 7000$, $a = 1000$, und $n = 3\frac{1}{2}$, folglich findet man $w = 3$.

Dritte Aufgabe.

Ein Körper bewegt sich so, daß er in der Zeit a den Raum m zurücklegt. Nachdem er während der Zeit t allein in Bewegung war, folgt ihm ein anderer, von einem Punkt aus, der um den Raum s von dem Punkt, von welchem der erste ausgieng, rückwärts liegt. Dieser zweite Körper legt in der Zeit b den Raum n zurück. Wie lange braucht er, bis er den ersten einholt?

Auflösung.

Die gesuchte Zeit sey $= x$. Da der erste Körper in der Zeit a den Raum m zurücklegt, so legt er in der Zeit t den Raum $\frac{mt}{a}$ zurück. Denn es verhält sich

$$a : t = m : \frac{mt}{a}$$

In der Zeit x aber legt dieser Körper den Raum $\frac{mx}{a}$ zurück. Denn es verhält sich

$$a : x = m : \frac{mx}{a}$$

Auf ähnliche Art findet man, daß der zweite Körper in der Zeit x den Raum $\frac{nx}{b}$ zurücklegt. Denn

$$b : x = n : \frac{nx}{b}$$

Weil

Weil aber dann der zweite Körper den ersten erreicht, und der erste in allem den Raum $\frac{mt}{a} + \frac{mx}{a}$ zurück gelegt hat, so muß auch der zweite diesen Raum in der Zeit x zurück legen. Aber auch noch überdieß den Raum ſ, weil der Punkt von welchem der zweite Körper ausgeht, um den Raum ſ rückwärts von demienigen liegt, von welchem der erste ausgieng. Folglich legt der zweite Körper in der Zeit x in allem den Raum $\frac{mt}{a} + \frac{mx}{a} + s$ zurück. Nun drückt aber $\frac{nx}{b}$ auch den Raum aus, den der zweite Körper in der Zeit x zurück legt. Folglich hat man die Gleichung $\frac{nx}{b} = \frac{mt}{a} + \frac{mx}{a} + s$

also $\frac{anx}{b} = mt + mx + as$

und $anx = bmt + bmx + abs$

folglich $anx - bmx = bmt + abs$

d. i. $(an - bm)x = (mt + as)b$

also $x = \frac{(mt + as)b}{an - bm}$

Nach dieser Formel kann das 44ste Exempel leicht berechnet werden. Einem Kourier, der aus dem Orte A abreiset, und alle 3 Stunden $2\frac{1}{2}$ Meilen macht, wird 24 Stunden darauf ein anderer aus dem Orte B, welches 7 Meilen von A rückwärts liegt, nachgeschickt, der alle 8 Stunden 7 Meilen macht. Wann wird er den ersten einholen?

Hier ist $a = 3$, $m = 2\frac{1}{2}$, $t = 24$, $s = 7$, $b = 8$, $n = 7$. Also $x = 648$ Stunden, oder 27 Tage.

Vermittelst dieser Formel kann auch das 41ste Exempel berechnet werden. Einem Boten, der schon vor 6 Tagen von einem gewissen Ort abgegangen ist, wird ein anderer aus eben dem Ort und auf dem nemlichen Weg nachgeschickt. Wenn nun der erste Bote täglich 4 Meilen, und der zweite täglich 6 Meilen zurücklegt, in wie viel Tagen wird der zweite den ersten einholen?

Hier ist $a = 1$, $m = 4$, $t = 6$, $b = 1$, $n = 6$, und $s = 0$ (Es ist nemlich s deswegen Null, weil der zweite von dem nemlichen Ort ausgeht, aus welchem der erste ausgieng).

Da nun $x = \frac{(mt + as)b}{an - bm}$

so ist $x = \frac{(4.6 + 1.0)1}{1.6 - 1.4}$ oder $\frac{24 + 0}{6 - 4}$

d. i. $x = \frac{24}{2}$ oder $= 12$ Tagen.

Dieses Exempel enthält einen einfachern Fall, als der, für welchen die Formel entwickelt wurde. Man sieht also, daß aus dem Zusammengesetzten das Einfachere gefunden werden kann. Man kann sogar die Formel selbst für diesen einfachern Fall ändern. Z. B. Es sey $a = b$ und $s = 0$.

Da nun $x = \frac{(mt + as)b}{an - bm}$

so ist für die gemachte Annahme $x = \frac{(mt + a0)a}{an - am}$

d. ist:

d. ist: $x = \frac{mta}{(n-m)a}$

oder (wenn man den Bruch mit a hebt,) $x = \frac{mt}{n-m}$

Nach dieser letztern Formel ist das eben angeführte 41ste Exempel noch leichter zu berechnen. In diesem ist nemlich $m = 4$, $t = 6$ und $n = 6$, folglich $x = 12$.

Es können nun noch eine unendliche Menge anderer ähnlicher Exempel nach diesen Formeln berechnet werden. Auch kann man m, oder t, oder n, oder a, oder b, oder f als unbekannt annehmen, und indem man die übrigen sechs Stücke als bekannt annimmt, die unbekannte Größe entwickeln, auf die Art, wie bei der vorigen Aufgabe gezeigt wurde.

Vierte Aufgabe.

Es ist die Summe f und die Differenz d zweier Zahlen gegeben, man soll die Zahlen selbst finden.

Auflösung.

Es sey die größere Zahl $= x$, und die kleinere $= y$, so ist $x + y = f$

und $x - y = d$

folglich wenn man addirt $2x = f + d$

also $x = \frac{f + d}{2}$

oder $x = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}d$

Nun

Nun nehme man wieder $x + y = s$
und subtrahire davon $x - y = d$
$- \quad + \quad -$

so ist d. Rest (nach d. 3. Aufg. 7 Abschn.) $2y = s - d$

also $y = \frac{s - d}{2}$

oder $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$

Das heißt: die größere Zahl ist der halben Summe und der halben Differenz zusammen gleich, und die kleinere findet man, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt.

Z. B. In zwei Kassen befindet sich zusammen eine Summe von 840 fl., und in der einen sind 130 fl. mehr als in der andern. Wie viel ist in jeder?

Hier ist $s = 840$ und $d = 130$. Folglich $\frac{1}{2}s = 420$ und $\frac{1}{2}d = 65$. Also sind in der einen Kasse $420 + 65$ oder 485 fl. und in der andern $420 - 65$ oder 355 fl. Auf diese Art lassen sich alle ähnliche Exempel berechnen.

Fünfte Aufgabe.

Es werden zwei Zahlen x und y von der Beschaffenheit gesucht, daß wenn x mit a und y mit b multiplicirt wird, und beide Producte addirt werden, ihre Summe $= g$, wenn man aber x mit m, und y mit n multiplicirt, und diese beiden Producte addirt, ihre Summe $= p$ sey.

Auflö-

Auflösung.

Vermöge der Bedingung der Aufgabe ist

$$1)\ ax + by = g$$

und $$2)\ mx + ny = p$$

Man multiplicire die zweite Gleichung mit b, dem Coefficienten von y in der ersten, und die erste Gleichung mit n, dem Coefficienten von y in der zweiten, und ziehe die erste multiplicirte Gleichung von der zweiten multiplicirten ab, damit y wegfalle.

Also $bmx + bny = bp$

davon subtrah. $anx + bny = ng$

Rest $bmx - anx = bp - ng$

folglich $(bm - an)x = bp - ng$

also $$x = \frac{bp - ng}{bm - an}$$

Aus der ersten Gleichung $ax + by = g$ folgt, daß $by = g - ax$, und daher

$$y = \frac{g - ax}{b}$$

Da nun $x = \frac{bp - ng}{bm - an}$, d. i. durch lauter bekannte Grössen bestimmt ist, so darf dieser Werth von x nur in der Gleichung $y = \frac{g - ax}{b}$ statt x substituirt werden, so ist auch y durch lauter bekannte Grössen bestimmt. Es ist nemlich alsdann

$$y = \frac{g - \frac{a(bp - ng)}{bm - an}}{b}$$

Dieser

Dieser Werth von y kann aber einfacher ausgedrückt werden. Es ist nemlich

$$by = g - \frac{a(bp - ng)}{bm - an}$$

oder $$by = g - \frac{abp - ang}{bm - an}$$

oder $$by = \frac{bmg - ang - (abp - ang)}{bm - an}$$

Läßt man von $-(abp - ang)$ die Parenthese weg, so muß man schreiben, $-abp + ang$, weil eigentlich nicht das ganze abp, sondern nur $abp - ang$ von dem vorhergehenden $bmg - ang$ subtrahirt werden soll. Wird also das ganze abp subtrahirt, so muß zum Ersatz ang addirt werden. Folglich ist $by = \frac{bmg - ang - abp + ang}{bm - an}$

Nun hebt sich aber $+ ang$ und $- ang$. Folglich ist $by = \frac{bmg - abp}{bm - an}$

Also, mit b die Gleichung dividirt, ist

$$y = \frac{mg - ap}{bm - an}$$

Vermittelst dieser beiden Formeln $x = \frac{bp - ng}{bm - an}$ und $y = \frac{mg - ap}{bm - an}$ können unzählige Exempel berechnet werden. Nemlich alle, aus denen zwei Gleichungen von der Form

$$ax + by = g$$

und $$mx + ny = p$$

oder

oder von der Form

$$x + y = g$$
$$mx + ny = p$$

oder von der Form

$$x + y = 1$$
$$mx + ny = p$$

hergeleitet werden können.

Z. B. Die siebente Aufgabe im dritten Abschnitt. Das Wasser, das aus der ersten Röhre in 12 Stunden fließt, macht mit dem, das aus der zweiten in 18 Stunden fließt, 3870 Maas. Wenn aber die erste 15 Stunden und die zweite 7 Stunden läuft, so erhält man 2745 Maas. Wie viel Maas laufen in einer Stunde aus jeder Röhre?

Es sey die stündliche Anzahl Maas der ersten $= x$, der zweiten $= y$. Nun ist hier $a = 12$, $b = 18$, $g = 3870$, $m = 15$, $n = 7$, und $p = 2745$.

Also ist nach gehöriger Substitution der Zahlen für die Buchstaben in den beiden Formeln,

$$x = \frac{18.\ 2745 - 7.\ 3870}{18.\ 15 - 12.\ 7} \text{ und } y = \frac{15.\ 3870 - 12.\ 2745}{18.\ 15 - 12.\ 7}$$

wenn man nun die Berechnung macht, so findet man $x = 120$ und $y = 135$. Auf ähnliche Art kann auch das 72 und 73ste Exempel berechnet werden.

Wäre die erste Aufgabe im dritten Abschnitt zu berechnen, von zweierlei Leinewand kostet das Stück

Stück der feinern 16 fl. und der weniger feinen 10 fl. zusammen sind es 63 Stücke, die 780 fl. kosten. Wie viele Stücke sind von ieder Sorte? so würde man die beiden Gleichungen herleiten

$$x + y = 63$$
$$16x + 10\,y = 780$$

Hält man diese Gleichungen mit denen

$$ax + by = g$$
$$\text{und } mx + ny = p$$

zusammen, so sieht man, daß hier $m = 16$, $n = 10$, $p = 780$, $g = 63$, $a = 1$, und auch $b = 1$ ist. Setzt man nun in den obigen beiden Formeln, 1 statt a und b, so erhält man folgende zwei einfachere Formeln:

$$x = \frac{p - ng}{m - n} \text{ und } y = \frac{mg - p}{m - n}$$

Substituirt man in diesen beiden Formeln die Zahlen für die vier Buchstaben, nemlich 63 für g, 16 für m, 10 für n, 780 für p, und rechnet gehörig, so findet man $x = 25$ und $y = 38$.

Vermittelst dieser beiden letztern Formeln lassen sich auch neun von den dabei stehenden Exempeln berechnen. Das 53ste Exempel wird so darnach berechnet. Ein Maurer arbeitete mit 12 Personen, nemlich Gesellen und Handlangern. Der Meister bekam täglich 1 fl., ein Geselle 40 Kr. und ein Handlanger 30 Kr. Der Wochenlohn betrug 47 fl. Wie viele Gesellen und Handlanger

waren

waren es? — Da die Arbeitswoche zu 6 Tagen gerechnet wird, so bekam wöchentlich der Meister 6 fl., ein Geselle 4 fl., ein Handlanger 3 fl. Zieht man den Lohn des Meisters von 47 fl. ab, so bleiben 41 fl. Wochenlohn für Gesellen und Handlanger. Nun sey $x =$ der Anzahl der Gesellen und y der Handlanger, so ist $g = 12$, $m = 4$, $n = 3$ und $p = 41$. Folglich findet man, wenn man nach den beiden Formeln rechnet, $x = 5$ und $y = 7$.

Auch das 54ste Exempel. Die Garnison einer gewissen Stadt besteht aus 1200 Mann, theils Cavallerie, theils Infanterie. Ein Cavallerist erhält monatlich 6 fl. ein Infanterist 4 fl., der ganze monatliche Sold beträgt 5600 fl. Wie viele Cavalleristen und Infanteristen waren es? Hier ist $g = 1200$, $m = 6$, $n = 4$ und $p = 5600$. Also findet man die Anzahl der Cavalleristen, oder $x = 400$ und der Inf. oder $y = 800$.

Auch das folgende 55ste Exempel. Es verlangt iemand 11 Stücke, (und zwar Neuntelsthalerstücke und Funfzehntelthalerstücke) für einen Thaler, wie viele Stücke erhält er von ieder Sorte? Es sey $x =$ der Anzahl der Neuntelsthalerstücke und y der Funzehntelthalerstücke. Hier ist $g = 11$, $m = \frac{1}{9}$, $n = \frac{1}{15}$, $p = 1$. Also findet sich nach den beiden Formeln $x = 6$ und $y = 5$.

Eben so lassen sich die folgenden Exempel, vom 56sten bis 61sten vermittelst dieser Formeln berechnen.

Auch

Auch sind eben diese beiden Formeln $x = \frac{p - ng}{m - n}$ und $y = \frac{mg - p}{m - n}$ bei der Vermischungsrechnung zu gebrauchen. Z. B. In der 2ten Aufgabe des dritten Abschnitts heißt es: Ein Goldarbeiter hat 15löthiges und 12löthiges Silber, er will eine 13l. Mischung von 3 Mark am Gewicht verfertigen. Wie viele Lothe muß er von ieder Sorte nehmen? — Es sey $x =$ der Anzahl Lothe des 15löthigen, und y des 12löthigen Silbers. Hier ist $g = 48$, (weil 3 Mark am Gewicht 48 Loth betragen) $m = 15$, $n = 12$ und $p = 624$, (welche Zahl entsteht, wenn man den Mittelgehalt 13 mit 16, als der Anzahl Lothe die auf eine Mark gehen, und mit 3 den Gewicht der Mischung in Mark ausgedrückt, multiplicirt,) folglich findet man vermittelst der beiden Formeln, $x = 16$ Loth und $y = 32$ Loth.

Auf ähnliche Art kann man das 64ste und 65ste Exempel berechnen.

Eben so die dritte Aufgabe des dritten Abschnitts. Ein Goldarbeiter hat 13karatiges und 20karatiges Gold, wie viele Karate muß er von ieder Sorte zu einer Arbeit nehmen, die 6 Karate wiegen und 18karatig seyn soll? Es sey $x =$ der Anzahl Karate des 20karatigen und y des 13karatigen Goldes. Hier ist $p = 6$, $m = 20$, $n = 13$ und $p = 108$, (welche Zahl entsteht, wenn man den Mittelgehalt 18 mit 24, als der Anzahl Karate einer Mark, und mit $\frac{1}{4}$ als dem Ge-

Gewicht der Mischung in Mark ausgedrückt, multiplicirt. Folglich findet man $x = 4\frac{2}{7}$ und $y = 1\frac{5}{7}$ Karaten.

Auf ähnliche Art kann das 66ste und 67ste Exempel berechnet werden.

Endlich, wenn man in der Formel $x = \frac{p - ng}{m - n}$ den Buchstaben g als 1 annimmt, so verwandelt sie sich in diese

$$x = \frac{p - n}{m - n}$$

$$\text{und} \quad y = \frac{m - p}{m - n}$$

Werden diese beiden Formeln mit Worten ausgedrückt, so ergiebt sich die sogenannte Alligationsregel, bei der man das Gewicht der Mischung als ein Ganzes, oder $= 1$ annimmt, und die Mengen der beiden Theile in ächten Brüchen findet. Es bedeutet nemlich m den Gehalt der bessern Sorte, n den Gehalt der schlechtern, und p den Mittelgehalt. Man subtrahire also den Gehalt n der schlechtern Sorte vom Mittelgehalt p, und den Mittelgehalt p von den Gehalt m der bessern Sorte; addire hierauf die gefundenen Differenzen $p - n$ und $m - p$ zusammen, so ist die Summe $m - n$ der gemeinschäftliche Nenner der beiden Brüche x und y, deren Zähler $p - n$ und $m - p$ sind. Z. B. Aus 15löthigen und 9löthigen Silber, 13löthiges zu verfertigen. Es sey x der Theil des 15löthigen und y der Theil

des 9löthigen. Nun ist $m = 15$, $n = 9$ und $p = 13$. Also $x = \frac{13 - 9}{15 - 9}$, d. i. $x = \frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ und $y = \frac{15 - 13}{15 - 9}$, d. i. $y = \frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$. Oder nach der gewöhnlichen Art $13 - 9 = 4$ und $15 - 13 = 2$, und $4 + 2 = 6$, also $x = \frac{4}{6}$ und $y = \frac{2}{6}$.

Sechste Aufgabe.

Eine unreine quadratische Buchstabengleichung aufzulösen.

Auflösung.

Die Gleichung sey $x^2 + ax = b$. Der Coefficient des Gliedes ax ist a, die Hälfte dieses Coefficienten ist $\frac{a}{2}$ und das Quadrat davon ist $\frac{a^2}{4}$ (6ter Abschnitt, §. 16.) dieses ist nun die Ergänzung, (6ter Abschnitt §. 42. u. §. 43. S. 179.)

Also $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$

folglich $x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$

also $x = - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$

Will man diesen Ausdruck einfacher machen, so bringe man $b + \frac{a^2}{4}$ auf einerley Benennung, (7ter Abschnitt, §. 7.) so erhält man $\frac{4b + a^2}{4}$

also

also ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b + a^2}{4}}$

d. i. $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{(4b + a^2)}}{\sqrt{4}}$ (6r Abschn. §. 17.)

oder $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{(4b + a^2)}}{2}$

d. i. $x = \frac{-a \pm \sqrt{(4b + a^2)}}{2}$

Z. E. Es sey folgende quadratische Zahlengleichung gegeben:

$x^2 + 15x = 184$, so ist, wenn man sie mit der Buchstabengleichung

$x^2 + ax = b$ zusammenhält,

$a = 15$, und $b = 184$, folglich $4b = 736$ und $a^2 = 225$,

da nun $x = \frac{-a \pm (4b + a^2)}{2}$

so ist $x = \frac{-15 \pm \sqrt{(736 + 225)}}{2}$

d. i. $x = \frac{-15 \pm \sqrt{961}}{2}$

Wenn man nun die Quadratwurzel aus 961 zieht, so findet man solche 31

also ist $x = \frac{-15 \pm 31}{2}$

Nimmt man den positiven Werth von 31, so ist $x = \frac{16}{2}$ oder 8.

Nimmt man den negativen Werth von 31, so ist $x = \frac{-46}{2}$ oder -23.

Es sey ferner die Buchstabengleichung $x^2 - ax = b$, die sich von der vorigen blos dadurch unterscheidet, das ax das Zeichen — vor sich hat, so wird das Quadrat eben so ergänzt, wie bei der vorigen. Man erhält also

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

Nur ist zu bemerken, daß von $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ die Quadratwurzel nicht $x + \frac{a}{2}$ sondern $x - \frac{a}{2}$ ist, folglich ist

$$x - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$$

also $$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(b + \frac{a^2}{2})}$$

Nun verfahre man weiter, wie vorhin, so erhält man endlich

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(4b + a^2)}}{2}$$

Neunter Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 1.

Eine arithmetische Progression ist eine Reihe Zahlen, die um die nehmliche Zahl zunehmen oder abnehmen. Z. B. 7, 10, 13, 16, 19 u. s. f. ist eine arithmetische Progression, weil die Zahlen immer um drei zunehmen, denn 7 und 3 ist 10, 10 und 3 ist 13 u. s. f. Ferner 80, 76, 72, 68 u. s. f. ist eine arithmetische Progression, weil die Zahlen immer um 4 abnehmen, denn 80 weniger 4 giebt 76, 76 weniger 4 giebt 72 u. s. f.

§. 2. Die Zahlen, aus denen die arithmetische Progression besteht, heißen die Glieder der arithmetischen Progression.

§. 3. Wenn die positiven Glieder einer arithmetischen Progression immer größer werden, so heißt die Progression eine zunehmende arithmetische Progression. Z. B. 7, 10, 13, 16, 19 u. s. f. ist eine zunehmende arithmetische Progression.

§. 4. Wenn die positiven Glieder immer kleiner werden, so heißt die Progression eine abnehmende arithmetische Progression. Z. B. 80, 76,

72, 68, 64 u. s. f. ist eine abnehmende arithmetische Progression.

§. 5. Die Zahl, um welche die Glieder der arithmetischen Progression zunehmen oder abnehmen, heißt die Differenz der arithmetischen Progression. Z. B. Bey der Progression 7, 10, 13 ꝛc. ist 3 die Differenz.

§. 6. Bei einer zunehmenden arithmetischen Progression entsteht das folgende Glied, wenn man zum vorhergehenden die Differenz addirt. Z. B. Es sey die Progression 7, 10, 13, 16 u. s. f. so entsteht das zweite Glied 10, wenn man zum ersten Glied 7 die Differenz 3 addirt, und das folgende dritte Glied 13, wenn man zum vorhergehenden 7 die Differenz 3 addirt u. s. f.

§. 7. Wenn also a das erste Glied einer zunehmenden arithmetischen Progression bedeutet, und d die Differenz, so ist das zweite Glied $a + d$, addirt man nun zum zweiten Glied wieder d, so giebt dieß das dritte Glied $a + d + d$ oder $a + 2d$; addirt man zu diesem dritten Glied wieder d, so giebt dieß das vierte Glied $a + 2d + d$ oder $a + 3d$.

§. 8. Daher kann man eine zunehmende arithmetische Progression auf folgende Art im Allgemeinen bezeichnen

	a,	$a + d$,	$a + 2d$,	$a + 3d$,	$a + 4d$
Zahl d. Glieder	1	2	3	4	5

Die

Die darunter gesetzten Zahlen, bedeuten die Zahl der Glieder, oder sie zeigen an, das wievielste das darüber stehende Glied ist, ob es das erste, das zweite, das dritte Glied u. s. f. ist. Auf diese Art deutet die Zahl n an, daß das dazugehörige Glied das nte Glied der Progression ist.

§. 9. Man kann nun fragen, wie das nte Glied bezeichnet werden muß? Das ist leicht zu beantworten. Man darf nur die Glieder mit der darunter stehenden Zahl vergleichen. Z. B. Ueber der Zahl 3 steht $a + 2d$, d. h. das dritte Glied ist $a + 2d$, das vierte Glied $a + 3d$, also würde das 12te Glied $a + 11d$ seyn, das 100ste Glied $a + 99d$ u. s. f. das heißt, d ist immer mit einer Zahl multiplicirt, die um eins kleiner ist, als die Anzahl der Glieder. Ist nun die Anzahl der Glieder n, so ist $n - 1$ um eins weniger als n, folglich ist das nte Glied $a + (n - 1)d$.

§. 10. Bezeichnet man das nte Glied, oder wie man es auch nennt, das allgemeine Glied, oder letzte Glied mit z, so ist $z = a + (n - 1)d$.

§. 11. Vermittelst dieser Formel kann man nun in ieder arithmetischen Progression, in der a und d gegeben ist, ein gewisses Glied sogleich berechnen. Z. B. Wie ist das 75ste Glied einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 50 und die Differenz 10 ist? Hier ist $a = 50$, $d = 10$ und $n = 75$, also ist $z = 50 + 74 . 10$ oder $z = 50 + 740$, d. i. $z = 790$. Ferner,

ner, wie ist das 150 Glied einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 106 und die Differenz 25 ist? Hier ist $a = 106$, $d = 25$, und $n = 150$, da nun $z = a + (n - 1)d$, so ist $z = 106 + 149 . 25$ oder $z = 106 + 3725$ oder $z = 3831$.

§. 12. Die Regel um das letzte Glied z in einer zunehmenden arithmetischen Progression zu finden, wenn das erste Glied a, die Differenz d, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist, heißt also: Man subtrahire von der Anzahl der Glieder die Zahl 1, multiplicire mit dem Rest die Differenz d, und addire zum Product das erste Glied a.

§. 13. Man kann auch vermittelst der Formel $z = a + (n - 1)d$ das letzte Glied einer abnehmenden arithmetischen Progression finden, man darf nur die Differenz d als negativ betrachten, dann ist die Formel $z = a - (n - 1)d$, welche zeigt, wie man das letzte Glied z einer arithmetischen abnehmenden Progression finden soll.

§. 14. Z. B. Es sey die abnehmende Progression 836, 830, 824 u. s. f. in der die Glieder immer um 6 abnehmen, und man will das 47ste Glied finden. Hier ist $a = 836$, $d = 6$, und $n = 47$, also da $z = a - (n - 1)d$, so ist $z = 836 - 46. 6$ oder $z = 836 - 276$, d. i. $z = 560$.

§. 15. Aus der Formel $z = a + (n - 1)d$ lassen sich drei andere herleiten, indem man entweder

weder a, oder n, oder d als unbekannt betrachtet.

Nemlich wenn $z = a + (n - 1)d$
so ist erstens $z - (n - 1)d = a$.

§. 16. Die Formel $a = z - (n - 1)d$ zeigt nun, wie man das erste Glied a berechnen kann, wenn das letzte Glied z, die Anzahl der Glieder n, und die Differenz d gegeben ist. Z. B. Das letzte Glied sey 206, die Differenz 7, und die Anzahl der Glieder 20, und man soll das erste Glied a finden, so ist $a = 206 - 19 . 7$, oder $a = 206 - 133$, d. i. $a = 73$.

§. 17. Ist die Progression abnehmend, so ist d als negativ zu betrachten, und folglich $a = z - (n - 1)(-d)$, d. i. $a = z + (n - 1)d$, (weil — mit — multiplicirt, zum Product + giebt, (6ter Abschnitt, §. 28.) Z. B. Das letzte Glied z einer abnehmenden arithmetischen Progression sey 6, die Differenz 8, die Anzahl der Glieder 11, so ist das erste Glied $a = 6 + 10 . 8$, oder $a = 6 + 80$, d. i. 86.

§. 18. Wenn $z = a + (n - 1)d$ (§. 11.)
so ist $z - a = (n - 1)d$
folglich $\frac{z - a}{n - 1} = d$.

§. 19. Diese Formel $d = \frac{z - a}{n - 1}$ zeigt, wie die Differenz zu berechnen ist, wenn das letzte Glied z, das erste Glied a, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist. Z. B. Das letzte Glied z

sey

sey 206, das erste Glied a sey 73, die Anzahl der Glieder sey 20, so ist die Differenz $d = \frac{206 - 73}{19}$, d. i. $d = \frac{133}{19}$ oder $= 7$.

§. 20. Endlich wenn $z = a + (n - 1)d$ (§. 11.) so ist $z - a = (n - 1)d$

$$\text{also} \quad \frac{z - a}{d} = n - 1$$

$$\text{folglich} \quad \frac{z - a}{d} + 1 = n.$$

§. 21. Diese Formel $n = \frac{z - a}{d} + 1$ zeigt, wie man die Anzahl der Glieder berechnen kann, wenn das letzte Glied z, das erste a, und die Differenz d gegeben ist. Z. B. Das letzte Glied z sey 206, das erste a sey 73 und die Differenz d sey 7, so ist die Anzahl der Glieder $n = \frac{206 - 73}{7} + 1$, d. i. $n = \frac{133}{7} + 1$ oder $n = 19 + 1$, d. i. $n = 20$.

§. 22. Unter der Summe einer arithmetischen Progression, versteht man das, was man findet, wenn alle Glieder einer gegebnen arithmetischen Progression addirt werden.

§. 23. Es läßt sich nun auch eine Formel finden, welche die Regel enthält, wie man die Summe einer arithmetischen Progression berechnen kann, ohne daß man nöthig hat, alle Glieder einzeln zu addiren. Z. B. Es sey folgende arithmetische Progression gegeben

10, 16, 22, 28, 34,

deren Summe gefunden werden soll, so bezeichne man diese Summe mit f, und schreibe unter diese Pro-

Progression, die nehmliche Progression, aber umgekehrt, so ist

$$10 + 16 + 22 + 28 + 34 = s$$

und auch $34 + 28 + 22 + 16 + 10 = s$

also addirt $44 + 44 + 44 + 44 + 44 = 2s$

Nun soll hier 44 so vielmal zu sich addirt werden, als die gegebene Progression Glieder hat, das heißt 5mal, oder wenn die gegebene Progression n Glieder hätte, überhaupt soviel mal, als sie Glieder haben würde, nemlich nmal. Eine Zahl aber nmal zu sich addiren, ist eben soviel als sie mit n multipliciren, folglich ist

$$n. \, 44 = 2s$$

Nun entstund aber das erste 44 dadurch, daß 10 und 34 addirt wurden, 10 ist aber das erste Glied a der gegebenen Progression, und 34 ihr letztes Glied z, (weil die untergeschriebene Progression nichts anders als die gegebene in umgekehrter Ordnung ist,) also ist 44 zu betrachten, als $a + z$, folglich ist

$$n\,(a + z) = 2s$$

und daher $\frac{n\,(a + z)}{2} = s$

§. 24. Diese Formel $s = \frac{n\,(a + z)}{2}$ zeigt nun wie die Summe einer arithmetischen Progression zu berechnen ist, deren erstes Glied a, letztes Glied z und Anzahl der Glieder n gegeben ist. Z. B. Es habe eine arithmetische Progression, deren

ren erstes Glied 80, und das letzte 575 ist, 100 Glieder, so ist die Summe $s = \frac{100\ (80 + 575)}{2}$ oder $s = \frac{100 \cdot 655}{2}$, das ist $s = \frac{65500}{2}$ oder $s = 32750$.

§. 25. Sollte das letzte Glied z nicht bekannt seyn, so kann man demohngeachtet die Summe finden. Denn da

$$s = \frac{n\ (a + z)}{2}\ (\text{§. } 24.)$$

und da $z = a + (n - 1)d$ (§. 11.)

so kann man in der ersten Formel statt z den Werth $a + (n - 1)d$ substituiren, so erhält man $s = \frac{n\ (a + a + (n - 1)d)}{2}$

oder $s = \frac{n\ (2a + (n - 1)d)}{2}$

§. 26. Diese Formel $s = \frac{n\ (2a + (n - 1)d)}{2}$ zeigt nun, wie die Summe seiner arithmetischen Progression zu berechnen ist, von der das erste Glied a, die Differenz d und die Anzahl der Glieder n gegeben ist. Z. B. Wie ist die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 24, die Differenz 8 und die Anzahl der Glieder 41 ist? Hier ist $s = \frac{41 \cdot (2 \cdot 24 + 40 \cdot 8)}{2}$ oder $s = \frac{41 (48 + 320)}{2}$, d. i. $s = \frac{41 \cdot 368}{2}$ oder $s = \frac{15088}{2}$, d. i. $s = 7544$.

Exempel zur Uebung.

1) Ein Herr miethet einen Bedienten, und giebt ihm das erste Jahr nicht mehr als 20 fl. Lohn, verspricht ihm aber für iedes folgende Jahr 5 fl. mehr, als für das vorhergehende. Der Bediente ist 10 Jahre in diesem Dienst, erhält aber keinen Lohn ausbezahlt. Nun stirbt sein Herr, und der Bediente soll von den Erben bezahlt werden. Wie viel hat der Bediente dem Vertrag gemäß zu fordern? (Hier ist die Summe einer arithmetischen Progression zu berechnen, (§. 27.) in der das erste Glied $a = 20$, die Differenz $d = 5$ und die Anzahl der Glieder $n = 10$ ist.) Antw. 425 fl.

2) Jemand läßt einen Brunnen graben, von 34 Fuß Tiefe, zahlt für den ersten Fuß in die Tiefe gerechnet 48 Kr.; und für ieden folgenden Fuß einen Kr. mehr. Wie viel zahlt er für den letzten? und wie viel für das Ausgraben des ganzen Brunnens? (Hier ist zuerst das letzte Glied z einer arithmetischen Progression zu suchen (§. 11. und §. 12.) in der das erste Glied $a = 48$, die Differenz $d = 1$ und die Anzahl der Glieder $n = 34$ ist. Alsdann die Summe der arithmetischen Progression nach §. 25.) Antw. den letzten Fuß 1 fl. 21 Kr. und für den ganzen Brunnen 36 fl. 33 Kr.

3) Jemand erhält Altergeld 20 Jahre lang. Das erste Jahr 300 fl. dann iedes folgende Jahr 25 fl. mehr. Wie viel beträgt das letzte, und

wie

wie viel beträgt die Summe aller derienigen, die er erhielt? Antw. Das letzte 775 fl. und die Summe 10750 fl.

4) Ein Capitalist hat 12000 fl. zu 5 p. C. auf Zinsen ausstehen. Er nimmt nun iährlich 100 fl. von den eingehenden Zinsen, und leiht sie gleichfalls auf Zinsen zu 5 p. C. aus. Wie viel beträgt nach 12 Jahren die Summe aller eingenommenen Zinse? (Man berechne den iährlichen Zins der 12000 fl., dieser sey $= a$, nun kommen iährlich 5 fl. Zins zu dem nächstvorhergehenden, folglich ist die Differenz $d = 5$, und die Anzahl der Glieder n ist $= 12$, also kann man die Summe nach der Formel §. 27. finden.) Antw. 7530 fl.

5) Jemand ermunterte einen iungen Menschen zum Fleiß in seinen Geschäften, und sagte unter andern, nehmen Sie mich zum Beispiel, ich hatte bei dem Antritt meines Amtes nur 150 fl. Gehalt, wegen meiner Thätigkeit bekam ich aber gleich das folgende Jahr eine Zulage von 25 fl. und da mein Eifer in meinen Berufsgeschäften immer mehr zunahm, so erhielt ich seit der Zeit iedes Jahr 25 fl. Zulage zu dem voriährigen Gehalt, so daß mein dießiähriger Gehalt 575 fl. beträgt. Die Frage ist, wie lange dieser Mann im Amt stund? (Hier wird die Anzahl der Jahre gesucht. Die Progression hat aber so viele Glieder, als hier Jahre gesucht werden. Also ist eigentlich die Frage nach der Anzahl der Glieder n, welche

welche vermittelst der Formel im §. 22. gefunden wird.) Antw. 18 Jahre.

6) Man findet unter den Papieren eines Meteorologen die merkwürdige Beobachtung, daß vom 8ten angefangen bis zum 19ten August das Thermometer täglich um einen halben Grad stieg, und daß das arithmetische Mittel $18\frac{3}{4}$ Grade war. Es ist die Frage, auf welchem Grad es am 10ten stund? Es findet hier eine arithmetische Progression statt, in welcher die Differenz $d = \frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder $n = 12$ ist. Es sey nun das erste Glied $= a$ (der Stand des Thermometers am 8ten) also das dritte Glied $= a + 2d$ oder $a + 2 . \frac{1}{2}$, d. i. $a + 1$ (der gesuchte Stand des Thermometers am 10ten) wenn nun das letzte Glied $= z$ ist, so ist das arithmetische Mittel $\frac{a + z}{2} = 18\frac{3}{4}$, folglich $a + z = 37\frac{1}{2}$, da da nun $z = a + (n - 1)d$ ist, so ist $2a + (n - 1)d = 37\frac{1}{2}$ oder $2a + 11 . \frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$, folglich $4a + 11 = 75$, also $a = \frac{64}{4}$ oder $a = 16$. Da nun der gesuchte Thermometerstand $= a + 1$, so ist dieser $= 17$.

7) Jemand ist gegenwärtig 35 Jahr alt und hat einen Sohn von 7 Jahren, ist also ietzt fünfmal so alt als sein Sohn, nach wie viel Jahren wird er nur doppelt so alt seyn als sein Sohn? (Hier wird die Anzahl der Glieder n gesucht, aus zwei arithmetischen Progressionen, bei denen die Differenz einerlei, nemlich $= 1$, die ersten Glie-

der

der 35 und 7 aber verschieden sind. Es sey nun 35 = A und 7 = a, ferner sey z das letzte Glied in der Progression, deren erstes Glied a, so ist 2z das letzte Glied in der andern Progression, deren erstes Glied A ist. Nun ist $a + (n - 1)d = z$ und $A + (n - 1)d = 2z$, oder $\frac{A + (n - 1)d}{2} = z$, so ist also $a + (n - 1)d = \frac{A + (n - 1)d}{2}$ oder $2a + 2(n - 1)d = A + (n - 1)d$, folglich $(n - 1)d = A - 2a$, ferner $n - 1 = \frac{A - 2a}{d}$ also $n = \frac{A - 2a}{d} + 1$. Da nun $A = 35$, $a = 7$ und $d = 1$ ist, so ist $n = \frac{35 - 14}{1} + 1$ oder $n = 21 + 1$, d. i. $n = 22$. Nemlich im 22sten Jahr von iezt an gerechnet, oder nach 21 Jahren ist dieser Vater noch einmal so alt als sein Sohn. (Man kann dieses Exempel auch auf folgende Art berechnen. Die Anzahl der gesuchten Jahre sey = x, das Alter des Sohns nach Verlauf dieser x Jahre = y, so ist $7 + x = y$, und da der Vater gegenwärtig 35 Jahre, und nach Verlauf von x Jahren doppelt so alt ist als der Sohn, so ist $35 + x = 2y$. Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun leicht x und y finden.)

8) Eine Schuld von 4800 fl. soll in 12 monatlichen Terminen abgetragen werden, und zwar in iedem folgenden Termin 50 fl. mehr als in dem nächstvorhergehenden, wie viel muß im ersten Termin bezahlt werden, und wie viel im letzten? Hier ist

ist von einer arithmetischen Progression die Differenz $d = 50$, die Anzahl der Glieder $n = 12$, und die Summe derselben $s = 4800$ gegeben, nun soll zuerst das erste Glied a gefunden werden. Man nehme die Formel im §. 26., $s = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ und entwickle aus ihr a, so findet man $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$. Wenn man nun die gehörigen Zahlen substituirt, so ist $a = \frac{4800}{12} - \frac{11.50}{2}$ oder $a = 125$ fl. Da nun $z = a + (n-1)d$ (§. 10.), so ist $z = 675$ fl. Im ersten Termin müssen also 125 fl. und im letzten 675 fl. bezahlt werden.

9) Jemand hat c Geldstücke in n gleichen Termingeldern und gleichen Zeiträumen zu bezahlen. Wenn er nun das Kapital c auf einmal abtragen will, wann muß er dieß thun?

Es sey der gesuchte Zeitraum $= x$. Da n gleiche Termine und Termingelder sind, so ist ein Termingeld $= \frac{c}{n}$. Nun trägt zu k pro Cent dem Schuldner das erste Termingeld $\frac{ck}{100n}$ Zins, das zweite $\frac{2ck}{100n}$ Zins u. s. f. das nte $\frac{nck}{100n}$ oder $\frac{ck}{100}$ Zins. Da nun die Summe dieser Zinsen dem Zins, den das Kapital c in der Zeit x trägt,

gleich seyn muß, wenn der Schuldner keinen Schaden leiden soll, dieser Zins aber $\frac{ckx}{100}$ ist, so ist

$$\frac{ck}{100n} + \frac{2ck}{100n} \ldots\ldots + \frac{ck}{100} = \frac{ckx}{100}$$

oder wenn mit 100 multiplicirt wird

$$\frac{ck}{n} + \frac{2ck}{n} \ldots + ck = ckx$$

und ferner wenn man mit ck dividirt

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \ldots + 1 = x$$

Nun ist in dieser Gleichung auf der linken Seite eine arithmetische Progression, in der das erste Glied $= \frac{1}{n}$, das letzte $= 1$ und die Anzahl der Glieder $= n$ ist, zu summiren.

Dazu gebraucht man die Formel im §. 24. $s = \frac{n(a+z)}{2}$. Da nun in dieser Formel a das erste Glied, z das letzte Glied und n die Anzahl der Glieder bedeutet, im gegenwärtigen Fall aber das erste Glied $= \frac{1}{n}$ das letzte $= 1$ ist, so setzt man diese Werthe statt a und z in diese Formel, so erhält man $s = \frac{n\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{2}$, und wenn man mit n den Zähler wirklich multiplicert, $s = \frac{\frac{n}{n} + n}{2}$

aber

aber $\frac{n}{n}$ ist $= 1$, also ist $s = \frac{1+n}{2}$, folglich, wenn man zur Gleichung zurück kehrt, und statt $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \ldots$ die gefundene Summe substituirt

$$\frac{1+n}{2} = x \text{ oder } \frac{n+1}{2} = x$$

d. i. $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = x$

Das heißt, man darf nur die halbe Anzahl der Termine nehmen, und den Bruch $\frac{1}{2}$ dazu addiren, so hat man die verlangte Zeit.

Z. B. Es hat iemand von einer Erbschaft den Interessenten 10000 fl. zu bezahlen, und solche in fünf gleichen Termingeldern und Terminen zu entrichten. Nun will er aber dieses Kapital mit einander bezahlen, wann muß dieß geschehen?

Hier ist $n = 5$, folglich $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ oder $x = 3$ Jahren.

Ferner: Ein Schuldner, der ein Kapital innerhalb 10 Monaten in 10 gleichen monatlichen Termingeldern zu bezahlen hat, will seine Schuld mit einander abtragen. Wann muß er dieß thun? Hier ist $n = 10$, also $x = 5\frac{1}{2}$ Monaten.

Bei dieser Aufgabe ist also, vermittelst der Buchstabenrechnung und der Formel, für die Summirung einer arithmetischen Progression, eine sehr leichte und einfache Auflösung gefunden worden.

10) Jemand hat c Geldstücke nach Verlauf der Zeit t zu bezahlen. Wenn er nun a solcher

Geldstücke baar bezahlt, und das übrige in n gleichen Terminen und Termingeldern, wie viel beträgt der Zwischenraum zwischen zwei aufeinander folgenden Terminen?

Es sey der gesuchte Zwischenraum = x. Die Zinsen des Kapitals c betragen während der Zeit t, (zu k pro C. gerechnet,) $\frac{ckt}{100}$. Da a Geldstücke baar bezahlt wurden, so ist der Rest = c — a, und da dieser in n gleiche Termingelder vertheilt wird, so ist ein Termingeld = $\frac{c - a}{n}$ wofür man, der Bequemlichkeit der Rechnung wegen, A setzen kann.

Es sey nun der Zwischenraum, vom Zeitpunkt der baaren Bezahlung an bis zur Auszahlung des ersten Termingelds = x, so ist der Zwischenraum von dem nemlichen Zeitpunkt an bis zur Auszahlung des zweiten Termingeldes = 2x, u. s. f. Alsdann wird der Zwischenraum zwischen zwei aufeinander folgenden Terminen = x seyn. Nun beträgt der Zins von A Geldstücken während der Zeit x zu k pro Cent gerechnet $\frac{Akx}{100}$, während der Zeit 2x, $\frac{2Akx}{100}$ u. s. f. also $\frac{nAkx}{100}$ während der Zeit nx. Soll nun der Schuldner keinen Schaden leiden, so müssen diese Zinse zusammen, die er einnimmt, eben so viel betragen, als der Zins $\frac{ckt}{100}$ den er vom Kapital c während der Zeit t

würde

würde eingenommen haben. Folglich ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{Akx}{100} + \frac{2Akx}{100} + \frac{3Akx}{100} \,..+ \frac{nAkx}{100} = \frac{ckt}{100}$$

Folglich $Ax + 2Ax + 3Ax \;..+ nAx = ct$

Daher $(1 + 2 + 3 \;...+ n)\,Ax = ct$

Nun summire man die in der Parenthese enthaltene arithmetische Progression $1 + 2 + 3 \;.. + n$, in der das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder gleichfalls $= n$ ist, vermittelst der Formel $s = \frac{n(a+z)}{2}$, so findet man $s = \frac{n(1+n)}{2}$. Diese Summe setze man nun in der Gleichung statt der Progression ein, so ist

$$\frac{n(1+n)}{2}\,Ax = ct$$

Da nun $A = \frac{c-a}{n}$, so substituire man diesen Werth, so ist

$$\frac{n(1+n)\,(c-a)x}{2n} = ct.$$

Da sich nun der Bruch durch n heben läßt, so ist

$$\frac{(1+n)\,(c-a)x}{2} = ct$$

$$\text{also } x = \frac{2ct}{(1+n)\,(c-a)}$$

Z. B. Man nehme die 13te Aufgabe des 2ten Abschnitts Seite 35.

Hier ist $c = 4500$, $t = 12$, $n = 4$, $a = 1500$. Folglich, wenn man in der Formel gehörig substituirt, $x = 7\frac{1}{5}$.

So können auch die bei der 13ten Aufgabe befindlichen Exempel, nemlich das 29ste und 30ste Exempel und eine unendliche Menge anderer berechnet werden.

§. 27. Ausser den vom §. 10. bis §. 25. entwickelten Formeln, um aus drei gegebenen Stücken einer arithmetischen Progression, das vierte zu finden, können noch mehrere hergeleitet werden, so daß in allen 20 verschiedene Formeln sich ergeben, welche in der folgenden Tabelle geordnet sind, in der a das erste Glied, z das letzte Glied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, und ſ die Summe einer arithmetischen Progression bedeutet.

Gegebene Stücke.	Gesuchtes Stück	
z, d, n	a	$a = z - (n-1)d$
z, n, ſ	a	$a = \frac{2\text{ſ}}{n} - z$
z, d, ſ	a	$a = \frac{d + \sqrt{[(d+2z)^2 - 8\text{ſ}d]}}{2}$
d, n, ſ	a	$a = \frac{\text{ſ}}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$

Gege-

Gegebene Stücke	Gesuchtes Stück	
a, z, n	d	$d = \frac{z - a}{n - 1}$
a, n, ſ	d	$d = \frac{2(ſ - an)}{n(n - 1)}$
a, z, ſ	d	$d = \frac{(z + a)(z - a)}{2ſ - z - a}$
z, n, ſ	d	$d = \frac{2(zn - ſ)}{n(n - 1)}$
a, z, d	n	$n = \frac{z - a}{d} + 1$
a, z, ſ	n	$n = \frac{2ſ}{a + z}$
a, d, ſ	n	$n = \frac{d - 2a + \sqrt{[(2a - d)^2 + 8dſ]}}{2d}$
z, d, ſ	n	$n = \frac{d + 2z - \sqrt{[(d + 2z)^2 - 8ſd]}}{2d}$
a, d, n	z	$z = a + (n - 1)d$
a, n, ſ	z	$z = \frac{2ſ}{n} - a$
a, d, ſ	z	$z = \frac{- d + \sqrt{[(2a - d)^2 + 8dſ]}}{2}$
d, n, ſ	z	$z = \frac{ſ}{n} + \frac{(n - 1)d}{2}$

Gegebene Stücke	Gesuchtes Stück	
a, z, n	s	$s = \frac{n(a + z)}{2}$
a, d, n	s	$s = \frac{n(2a + (n - 1)d)}{2}$
a, d, z	s	$s = \frac{a + z}{2} + \frac{(a + z)(z - a)}{2d}$
z, d, n	s	$s = zn - \frac{(n - 1)dn}{2}$

Exempel zur Uebung.

1) Unter fünf Personen, die nach der Scheibe schiesen, sollen 35 fl. vertheilt werden, und zwar so, daß der vorzüglichste 11 fl., ieder minder vorzügliche aber nach der Ordnung um gleichviel weniger erhalte, als der nächst vorhergehende, wie viel bekommt der, welcher am wenigsten zu erhalten hat, und um wie viel bekommt ieder folgende mehr? Antw. 3 fl. und ieder folgende 2 fl. mehr. (Denn was der, welcher am wenigsten bekommt, zu erhalten hat sey = a, und was ieder mehr bekommt = d. Das a wird gefunden, vermittelst der zweiten Formel in der Tabelle, und sodann d vermittelst der fünften Formel in der Tabelle.)

2) Jemand setzt auf einen Auszug einen Groschen, und da er nichts gewinnt, das zweitemal zwei

zwei Groschen, und so immer einen Groschen mehr. Wenn nun ein Auszug 15fach zurück bezahlt wird, wie vielmal kann man auf diese Art setzen, damit man, im Fall man das letztemal einen Auszug erräth, das gesetzte Geld ganz zurück erhalte? Antw. 29mal. Wer 30mal so setzen wollte, würde schon verlieren, wenn er dann einen Auszug erräth. (Da er das erstemal einen Groschen, das zweitemal zwei Groschen u. s. f. setzt, so setzt er das xte mal x Groschen. Hier ist also eine arithmetrische Progression, in der $a = 1$, $d = 1$, $z = x$, und n auch $= x$ ist, folglich ist die Summe $\frac{(a + z)n}{2}$ oder $\frac{(1 + x)x}{2}$, so viel Groschen werden nemlich in allem gesetzt. Gewinnt er nun bei dem xten mal, so erhält er 15x Groschen, folglich hat man die Gleichung $\frac{(1 + x)x}{2} = 15x$ welche leicht aufzulösen ist.)

3) Jemand hat eine schuldige Summe von 1295 fl. in monatlichen Terminen abzutragen, und zwar für das erste Monat 600 fl., und iedes folgende Monat 50 fl. mehr. Wie viel hat er das letzte Monat zu entrichten, und in wie viel Monaten hat er seine Schuld abgetragen? Antw. 1250 fl. und in 14 Monaten ist die Schuld abgetragen. (z wird gefunden, vermittelst der 15ten Formel der Tabelle, und dann n vermittelst der 9ten Formel. Oder man berechnet zuerst n nach der 11ten Formel und z nach der 13ten.

§. 28.

§ 28. Es giebt arithmetische Progressionen, bei denen die Differenzen gleichfalls eine arithmetische Progression formiren, und erst die Differenzen dieser zweiten arithmetischen Progression gleich sind. Solche arithmetische Progressionen heißen **arithmetische Progressionen vom zweiten Rang.**

Z. B. Man nehme die ganzen Zahlen, wie sie in der natürlichen Ordnung folgen, und erhebe sie aufs Quadrat, so entstehen folgende Quadratzahlen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, u. s. f.

davon sind die Differenzen

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, u. s. f.

diese formiren eine arithmetische Progression, in der die Differenz 2 ist. Also sind die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 u. s. f. die Glieder einer arithmetischen Progression vom zweiten Rang, die durch drei Glieder, z. B. 1, 4 und 9 bestimmt wird.

Ferner: von den Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 u. s. f.

sind die Differenzen

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. f.

welche eine arithmetische Progression formiren, in der die Differenz der Glieder 1 ist. Folglich sind die Zahlen, 1, 3, 6, 10 u. s. f. die Glieder einer arithmetischen Progression vom zweiten Rang,

die

die gleichfalls durch drei Glieder, z. B. 1, 3 und 6 bestimmt wird.

§. 29. Es sey nun die Aufgabe, die Summe ſ einer solchen arithmetischen Progression vom zweiten Rang, die aus n Gliedern besteht, zu finden, so nehme man an, w, x, und y seyen gewisse noch unbekannte Zahlen, ſ sey die Summe von n Gliedern, und setze

$$nw + n^2x + n^3y = ſ$$

Bedeutet nun S die Summe von n — 1 Gliedern, so ist $(n-1)w + (n-1)^2x + (n-1)^3y = S$ Nun ist $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$ und $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n. - 1$, folglich $nw - w + n^2x - 2nx + x + n^3y - 3n^2y + 3ny - y = S$.

Wenn man diese Gleichung von der ersten Gleichung $nw + n^2x + n^3y = ſ$ subtrahirt, so ist der Rest

$$w + 2nx - x + 3n^2y - 3ny + y = ſ - S.$$

Nun ist ſ — S das nte Glied. Denn ſ ist die Summe von n Gliedern, und S die Summe von n — 1 Gliedern, das heißt von einem Glied weniger, als ſ enthält, Subtrahirt man also S von ſ, so bleibt das letzte Glied z oder das nte Glied übrig.

Ferner, da eine arithmetische Progression vom zweiten Rang durch drei Glieder bestimmt wird, so sey das erste Glied = a, das zweite = b,

das

das dritte $= c$. Für a ist die Anzahl der Glieder $n = 1$, für b ist $n = 2$, und für c ist $n = 3$. Es sey nun $n = 1$, und man substituire diesen Werth für n in der letzten Gleichung, so ist $w + 2x - x + 3y - 3y + y = a$
N. 1. d. i. $w + x + y = a$

Ferner sey $n = 2$, oder die Progression habe nur zwei Glieder, und man substituire wiederum diesen Werth für n, so ist

$$w + 4x - x + 12y - 6y + y = b$$

N. 2. d. i. $w + 3x + 7y = b$.

Endlich sey $n = 3$, oder die Progression habe nur drei Glieder, und man substituire wiederum diesen Werth für n, so ist

$$w + 6x - x + 27y - 9y + y = c$$

N. 3. d. i. $w + 5x + 19y = c$.

Nun hat man drei Gleichungen, N. 1., N. 2, und N. 3. aus denen man also w, x und y entwickeln kann.

Nemlich von N. 2. $w + 3x + 7y = b$
subtrahire man N. 1. $w + x + y = a$
so ist der Rest $2x + 6y = b - a$

Ferner von N. 3. $w + 5x + 19y = c$
subtrahire man N. 1. $w + x + y = a$
so ist der Rest $4x + 18y = c - a$

Nun multiplicire man den ersten Rest $2x + 6y = b - a$ mit der Zahl 2, so ist $4x + 12y = 2b - 2a$ und dieß Product ziehe man

man vom zweiten Rest $4x + 18y = c - a$ ab, nemlich:

$$\begin{array}{rcl} 4x + 18y &=& c - a \\ 4x + 12y &=& 2b - 2a \\ - \quad - & & - \quad + \\ \hline \end{array}$$

Rest $\quad 6y = c - 2b + a$

also $\quad y = \frac{a + c - 2b}{6}$

Da nun $2x + 6y = b - a$

so ist $2x + a + c - 2b = b - a$

also $\quad x = \frac{3b - 2a - c}{2}$

oder auch $x = \frac{9b - 6a - 3c}{6}$ (wenn man Zähler u. Neñer mit 3 multipl.)

Da endlich $w + x + y = a$

so ist $\quad w = a - x - y$

d. i. wenn man die gefundenen Werthe von x und y substituirt:

$$w = a - \frac{9b - 6a - 3c}{6} - \frac{a + c - 2b}{6}$$

oder $w = \frac{6a - 9b + 5a + 3c - a - c + 2b}{6}$

d. i. $w = \frac{11a - 7b + 2c}{6}$

Nun gehe man zur ersten Gleichung $nw + n^2x + n^3y = s$ zurück, und substituire in ihr die gefundenen Werthe von w, x und y, so ist

$$\frac{n(11a - 7b + 2c) + n^2(9b - 6a - 3c) + n^3(a + c - 2b)}{6} = s$$

Dieses

§. 30. Dieses ist also die Formel, um in einer arithmetischen Progression vom zweiten Rang, von der das erste Glied a, das zweite b, das dritte c, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist, die Summe s zu berechnen.

§. 31. Aus dieser Formel kann die für das nte Glied, oder für das letzte Glied z leicht abgeleitet werden. Denn da s — S dem nten Glied, oder dem letzten Glied z gleich ist, (§. 29.) so ist

$$w + 2nx - x + 3n^2y - 3ny + y = z$$

(§. 29.) oder es ist

$$w + (2n - 1)x + (3n^2 - 3n + 1)y = z$$

Nun darf man in dieser Gleichung nur statt w, x und y, die vorhin gefundenen Werthe substituiren, und den Ausdruck auf die einfachste Form bringen, so erhält man endlich

$$\frac{6a + 2c - 6b + n(8b - 5a - 3c) + n^2(a + c - 2b)}{2} = z$$

§. 32. Es sey nun die Aufgabe, von der Progression 1, 4, 9, 16, 25 u. s. f. n Glieder zu summiren, oder, welches eben so viel ist, die Summe s von n Quadratzahlen, deren Quadratwurzeln die ganzen Zahlen sind, die in natürlicher Ordnung auf einander folgen, zu finden. Hier ist a = 1, b = 4, und c = 9. Man substituire diese Zahlen, statt a, b, und c in der im §. 29. angegebenen Summirungsformel, so erhält man:

$$\frac{n(11 - 28 + 18) + n^2(36 - 6 - 27) + n^3(1 + 9 - 8)}{6} = s$$

oder

$$\text{oder} \quad \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = s$$

$$\text{oder} \quad \frac{(1 + 3n + 2n^2)n}{6} = s.$$

aber $2n^2 + 3n + 1$ läßt sich mit $n + 1$ dividiren, und giebt zum Quotienten $2n + 1$. Oder $n + 1$ und $2n + 1$ sind die Factoren von $2n^2 + 3n + 1$, also erhält man folgenden einfachern Ausdruck, der für die Berechnung sehr bequem ist.

$$\frac{(2n + 1)(n + 1)n}{6} = s$$

Z. B. Wie ist die Summe von 30 der gedachten Quadratzahlen? Hier ist $n = 30$, also

$$\frac{61 . 31 . 30}{6} = s \text{ d. i. } 9455 = s$$

§. 33. Es sey ferner die Aufgabe, von der Progression, 1, 3, 6, 10, 15 u. s. f. n Glieder zu summiren. Hier ist $a = 1$, $b = 3$, und $c = 6$. Man substituire diese Zahlen, statt a, b und c in der, im §. 29. angegebenen Summirungsformel, so erhält man:

$$\frac{n(11 - 21 + 12) + n^2(27 - 6 - 18) + n^3(1 + 6 - 6)}{6} = s$$

$$\text{oder} \quad \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6} = s$$

$$\text{oder} \quad \frac{n^2 + 3n + 2)n)}{6} = s$$

Nun läßt sich $n^2 + 3n + 2$ durch $n + 1$ theilen, und giebt zum Quotienten $n + 2$. Oder $n + 1$ und $n + 2$ sind Factoren dieses Ausdrucks.

Also

Also ist $\frac{(n+2)(n+1)n}{6} = s$

Z. B. Wie ist die Summe von 30 Gliedern, der erwähnten Progression 1, 3, 6, 10 u. s. f. Hier ist n = 30. Daher:

$$\frac{32 . 31 . 30}{6} = s \text{ d. i. } 4960 = s$$

Exempel zur Uebung.

1) In einem Arsenal ist eine Anzahl Kugeln in Form einer viereckigten Pyramide geschlichtet, und zwar besteht sie aus 24 über einander liegenden Schichten. Wie viele Kugeln enthält diese Pyramide? (Die Schichten dieser Pyramide, stellen, wenn man von der Spitze derselben abwärts rechnet, eine Progression von Quadraten dar, deren Seiten nach der natürlichen Ordnung der ganzen Zahlen zunehmen. Um also zu finden, wie viele Kugeln diese Pyramide enthält, muß man die Summe derjenigen arithmetischen Progression vom zweiten Rang berechnen, von der im §. 32. geredet wurde. Die Anzahl der Glieder n ist hier 24.) Antw. 4900 Kugeln.

2) In eben diesem Arsenal ist eine andere Anzahl Kugeln in Form einer dreieckigten Pyramide geschlichtet, die aus 21 über einander liegenden Schichten besteht. Wie viele Kugeln enthält diese Pyramide? (Die Schichten dieser Pyramide stellen, von der Spitze der Pyramide abwärts gerechnet, eine Progression der Zahlen, 1, 3, 6, 10 u. s. w. vor. Nemlich die Spitze besteht aus

aus einer Kugel, dann folgt eine Schicht von 3 Kugeln, dann von 6 Kugeln, dann von 10 Kugeln u. s. f. Also darf man nach §. 33. nur die Summe der erwähnten Progression berechnen, n ist dabey = 21.) Antwort 1771 Kugeln.

3) In einem andern Zeughaus ist eine Anzahl Kugeln in Form einer abgekürzten vierseitigen Pyramide. Sie besteht aus 12 Schichten, und die Seite der obersten Schicht enthält 7 Kugeln. Wie viele Kugeln sind in allem? (Die Schichten dieser Pyramide, stellen eine Progression von Quadraten dar, deren Seiten nach der natürlichen Ordnung der ganzen Zahlen zunehmen. Da nun die Seite der obersten Schicht 7 Kugeln enthält, so enthält die Seite der folgenden Schicht 8 Kugeln, und die der darauf folgenden 9 Kugeln. Folglich die oberste Schicht 49, die folgende 64 und die nächste darauf 81 Kugeln. Nun suche man die Summe nach der Formel im §. 30. in welcher hier $a = 49$, $b = 64$, $c = 81$ und $n = 12$ ist.) Antw. 2018 Kugeln.

4) In dem nemlichen Saal ist eine Anzahl Kugeln in Form einer abgekürzten dreieckigten Pyramide geschlichtet. Sie besteht aus 18 Schichten, und die Seite der obersten Schicht enthält 10 Kugeln. Wie viele sind in allem in dieser Pyramide? (Da die oberste Schicht ein gleichseitiges Dreieck bildet, wovon iede Seite 10 Kugeln faßt, so muß zuerst gesucht werden, wie viele Kugeln dieses Dreieck enthält. In der Spitze die-

ses Dreiecks liegt eine Kugel, dann 2, dann 3 u. s. f. Also darf man nur die Summe einer arithmetischen Progression vom ersten Rang suchen, deren erstes Glied $a = 1$ das letzte $z = 10$ und n auch $= 10$ ist, vermittelst der Formel $s = \frac{n(a+z)}{2}$, so ist $s = \frac{10 \cdot 11}{2}$ oder $s = 55$. Eine Seite der folgenden Schicht, die gleichfalls ein gleichseitiges Dreieck bildet, hat 11 Kugeln, also ist hier $s = \frac{11 \cdot 12}{2}$ oder 66. Eine Seite der folgenden Schicht hat 12 Kugeln, sie enthält also $\frac{12 \cdot 13}{2}$ oder 78 Kugeln. Also entsteht hier eine arithmetische Progression vom zweiten Rang, deren erstes Glied $a = 55$, das zweite Glied $b = 66$, das dritte $c = 78$ und $n = 18$ ist. Von dieser wird die Summe gesucht, vermittelst der Formel im §. 30.) Antwort. 3489 Kugeln.

Zehn-

Zehnter Abschnitt.
Von den Permutationen oder Versetzungen.

§. 1.

Bei zwei verschiedenen Dingen oder Elementen a und b finden nur zwei Versetzungen statt, ab und ba, oder die Zahl der Versetzungen von zwei verschiedenen Elementen ist = 1. 2.

§. 2. Nun ist aber die Frage, wie werden die Permutationen von drei verschiedenen Elementen a, b, c einzeln, vollständig und gut geordnet dargestellt? Man setze die drei Buchstaben nach ihrer Folge, nemlich abc, man lasse den ersten Buchstaben a weg, und permutire bc, so erhält man bc und cb, vor iede dieser zwei Complexionen setze man a, so giebt dieß abc und acb, das heißt: die Complexionen der ersten Ordnung dreier Elemente, die sich mit a anfängt. Nun sollen die Complexionen der Ordnung, die sich mit b anfängt, gefunden werden. Man lasse also von den gegebenen drei Elementen b weg, und permutire die beiden übrigen, so erhält man ac und ca, vor iede dieser beiden Complexionen setze man b, so giebt dieß bac und bca. Um endlich die Complexionen derienigen Ordnung, die

sich mit c anfängt, zu finden, lasse man von den gegebenen drei Elementen c weg, und permutire ab, so erhält man ab und ba, vor iede dieser Complexionen setze man c, so giebt dieß cab und cba. Das Schema ist folgendes:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

Die Anzahl der Versetzungen oder Permutationen von drei verschiedenen Elementen ist also = 6. Da nun die Anzahl der Versetzungen von zwei verschiedenen Elementen = 2 ist, (§. 1.) so ist die Anzahl der Versetzungen von drei verschiedenen Elementen dreimal so groß, als die von zwei verschiedenen Elementen. Das heißt, sie ist = 2. 3 = 1. 2. 3.

§. 3. Es sey ferner die Aufgabe, die Permutationen von vier verschiedenen Elementen a, b, c, d, vollständig und gut geordnet darzustellen.

Weil sich die erste Ordnung der 4 Elemente mit a anfangen soll, so nehme man die übrigen drei Elemente b, c, d, nach der Folge der Buchstaben, und permutire sie, nach §. 2, so erhält man bcd, bdc, cbd, cdb, dbc und dcb. Einer ieden dieser sechs Complexionen setze man a vor, so giebt dieß: abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb.

Da sich nun die zweite Ordnung der 4 Elemente mit b anfangen soll, so nehme man aus den gegebenen a, b, c, d, das Element b weg,

und permutire die übrigen drei Elemente a, c, d, nach §. 2. so erhält man: acd, adc, cad, cda, dac, dca. Jeder dieser 6 Complexionen setze man b vor, so giebt dieß: bacd, badc, bcad, bcda, bdac und bdca.

Da sich ferner die dritte Ordnung der 4 gegebenen Elemente mit c anfangen soll, so lasse man aus diesen 4 gegebenen Elementen c weg, permutire die drei übrigen, abd und setze ieder dieser erhaltenen Complexionen den Buchstaben c vor.

Endlich da sich die vierte Ordnung der 4 gegebenen Elemente mit d anfangen soll, so nehme man aus diesen 4 gegebenen Elementen d weg, permutire die drei übrigen abc, und setze ieder erhaltenen Complexion den Buchstaben d vor.

Auf diese Art erhält man folgendes Schema:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Die Anzahl der Permutationen von vier verschiedenen Elementen, ist nemlich 24. Denn drei verschiedene Elemente geben sechs Permutationen, (§. 2.) wenn nun vier verschiedne Elemente gegeben sind, so kann man a weglassen, und die übri-

gen drei sechsmal permutiren, und so nach und nach auch b, c und d weglassen, und die übrigen drei iedesmal sechsmal permutiren, und dann zu den ersten 6 Complexionen vornen a setzen, zu den folgenden 6 Complexionen b setzen u. s. f. so hat man viermal 6 Complexionen der vier gegebenen verschiedenen Elemente, das heißt, da die Anzahl der Permutationen von 3 verschiedenen Elementen = 6, oder = 1. 2. 3. (§. 2.), so ist die Anzahl der Permutationen von 4 verschiedenen Elementen 4mal so groß, als die von 3 Elementen, oder sie ist = 1. 2. 3. 4.

§. 4. Es sey die Aufgabe, die Permutationen von fünf gegebenen verschiedenen Elementen, a, b, c, d, e vollständig und gut geordnet darzustellen.

Man lasse a weg, permutire die übrigen vier Elemente b, c, d, e nach §. 3., und setze ieder von den 24 erhaltenen Complexionen das a vor. — Sodann lasse man aus den gegebenen fünf Elementen b weg, permutire die übrigen vier Elemente a, c, d, e nach §. 3. und setze ieder von diesen 24 erhaltenen Complexionen das b vor u. s. f. so erhält man endlich fünf Ordnungen der Elemente a, b, c, d, e, und iede Ordnung enthält 24 Complexionen. Dieß giebt in allem 5mal 24 oder 120 Complexionen der 5 gegebenen verschiedenen Elemente, oder weil 24 nach §. 3. = 1. 2. 3. 4 ist, in allem 1. 2. 3. 4. 5 solche Complexionen.

§. 5.

§. 5. Die Anzahl der Permutationen von sechs gegebenen Elementen, ist = 1. 2. 3. 4. 5. 6 oder 720. Davon kann man sich durch Vergleichung mit dem vorhingesagten, überzeugen.

§. 6. Die Anzahl der Permutationen von sieben gegebenen verschiedenen Elementen ist 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

§. 7. Ueberhaupt ist die Anzahl der Permutationen von n gegebenen verschiedenen Elementen, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. . . . . n.

§. 8. Z. B. Wie vielmal können 10 verschiedene Elemente versetzt werden? Hier ist n = 10, also die Anzahl der gesuchten Permutationen = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Multiplicirt man diese Zahlen mit einander, so zeigt das Product 3628800 die Anzahl der gesuchten Versetzungen der 10 gegebenen verschiedenen Elemente.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Wie vielmal können acht Personen ihre Plätze am Tisch wechseln, oder so verändern, daß sie iedesmal in einer andern Ordnung sitzen? Antw. 40320mal.

2) Wie vielmal können zwölf verschiedene Kartenblätter in eine andere Ordnung gelegt werden? Antw. 479001600mal.

3) Wie vielmal können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

Antw. 620448401733239439360000mal.

Eilfter Abschnitt.

Von den Combinationen.

§. 1.

Bei den Combinationen muß man die Anzahl der Verbindungen von n gegebenen verschiedenen Elementen, wenn in ieder Verbindung m Elemente beisammen sind, zu bestimmen wissen.

1) Von den Verbindungen zu zweien, oder den Combinationen für die Binionen.

§. 2. Wenn drei verschiedene Elemente a, b, c, so zu verbinden sind, daß in ieder Verbindung sich deren zwei befinden, und iede Verbindung von der andern verschieden ist, so finden drei Verbindungen statt. Man verbinde nemlich das erste Element a mit dem nächst folgenden b, und sodann mit dem darauf folgenden c, hierauf nehme man das zweite Element b und verbinde es mit dem nächst folgenden c. Auf diese Art erhält man ab, ac, bc. Die Anzahl der Combinationen von drei verschiedenen Elementen für die Binionen, oder für die Amben ist also = 3, oder = 1 + 2

§. 3. Wenn vier verschiedene Elemente a, b, c, d, zu zweien zu verbinden sind, so ergeben

 sich

sich sechs Verbindungen. Man verbinde nemlich das erste Element a, mit dem nächst folgenden b, dann mit dem darauf folgenden c, dann mit dem darauf folgenden d, so erhält man ab, ac, ad. Hierauf verbinde man das zweite b von den gegebenen Elementen a, b, c, d mit dem nächst folgenden c, und mit dem darauf folgenden d, so erhält man bc, bd, endlich verbinde man das dritte c von den gegebenen Elementen a, b, c, d, mit dem nächst folgenden d, so giebt dieß cd. Also sind die sechs Combinationen: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Es ist leicht einzusehen, daß hier zu den im §. 2. angegebenen drei Combinationen von drei gegebenen verschiedenen Elementen noch drei hinzukommen, nemlich die Verbindungen des vierten Elements d, mit den Elementen a, b und c. Da nun nach §. 2. die Anzahl der Combinationen von drei verschiedenen Elementen zu zweien = 1 + 2 ist, so läßt sich die Anzahl der Combinationen von vier verschiedenen Elementen zu zweien ausdrücken durch 1 + 2 + 3.

§. 4. Wenn fünf verschiedene Elemente a, b, c, d, e zu zweien zu verbinden sind, so ergeben sich 10 Verbindungen. Man verfahre nemlich nach der vorhin gezeigten Art, so erhält man ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de. Es kommen nemlich zu den im §. 3. angegebenen sechs Verbindungen von vier verschiedenen Elementen, noch vier Verbindungen hinzu, nemlich die Verbindungen des fünften gegebenen Elements &c. mit

mit den Elementen a, b, c, d. Da nun nach §. 3. die Anzahl der Combinationen von vier verschiedenen Elementen zu zweien $= 1 + 2 + 3$ ist, so läßt sich die Anzahl der Combinationen von fünf verschiedenen Elementen zu zweien ausdrücken durch $1 + 2 + 3 + 4$.

§. 5. Die Anzahl der Combinationen zu zweien von sechs verschiedenen Elementen a, b, c, d, e, f, wird also seyn $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, oder 15.

§. 6. Auf ähnliche Art wird die Anzahl der Combinationen zu zweien, von sieben verschiedenen Elementen, seyn $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ oder 21.

§. 7. Folglich ist die Anzahl der Combinationen zu zweien, von n verschiedenen Elementen, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ldots . + (n - 1)$. Nun bilden diese Zahlen eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied $A = 1$, das letzte Glied $z = n - 1$, und die Anzahl der Glieder N auch $= n - 1$ ist. Es ist aber die Summe einer arithmetischen Reihe $= \frac{N(A + z)}{2}$ (Neunter Abschn. §. 25.) folglich in diesem Fall $= \frac{(n-1)(1 + n - 1)}{2}$ d. i. $= \frac{(n-1)n}{2}$, oder $= \frac{n(n-1)}{2 . 1}$.

Z. B. Wie vielmal können 20 verschiedene Zahlen zu zweien verbunden werden? Hier ist $n = 20$, also $n - 1 = 19$. Folgllich ist

ist $\frac{n(n-1)}{2.\ 1} = \frac{20.\ 19}{2.\ 1}$ oder 190. Zwanzig verschiedene Zahlen lassen sich also auf 190 Arten paarweise verbinden.

Ferner: Wie viele Amben enthalten die 90 Nummern einer Zahlenlotterie? Hier ist $n = 90$, also $n - 1 = 89$, folglich $\frac{n(n-1)}{2.\ 1} = \frac{90.\ 89}{2.\ 1}$ oder 4005.

2) Von den Verbindungen zu Dreien, oder den Combinationen für die Ternionen.

§. 8. Wenn vier verschiedene Elemente a, b, c, d, zu Dreien zu verbinden sind, so finden vier Verbindungen statt. Man verbinde nemlich die ersten drei Elemente a, b, c zu Zweien, so finden folgende Verbindungen statt: ab, ac, bc. Nun verbinde man ferner ab mit c und d, ac mit d, und bc gleichfalls mit d, so erhält man: abc, abd, acd und bcd. Also ist die Anzahl der Combinationen von vier Elementen für die Ternionen = 4, die man auf eine, der Bezeichnung der Anzahl der Combinationen zu Zweien, ähnliche Art so ausdrücken kann $\frac{4.\ 3.\ 2}{3.\ 2.\ 1}$.

§. 9. Wenn fünf verschiedene Elemente a, b, c, d, e, zu dreien zu verbinden sind, so finden zehn Verbindungen statt. Man verbinde nemlich die ersten vier Elemente zu zweien, so finden folgende sechs Verbindungen statt, ab, ac, ad, bc,

bd,

bd, cd. Nun verbinde man ab mit c, d und e, dann ac mit d und e, ferner ad mit e, bc mit d und e, bd mit e und cd mit e, so erhält man: abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, und cde. Also ist die Anzahl der Combinationen von fünf Elementen für die Ternionen $= 10$ oder $= \frac{5.4.3}{3.2.1}$.

§. 10. Auf ähnliche Art findet man, daß wenn sechs verschiedene Elemente a, b, c, d, e, f zu dreien zu verbinden sind, sich folgende Combinationen ergeben, abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, aef, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def. Also ist die Anzahl dieser Combinationen $= 20$, oder $= \frac{6.5.4}{3.2.1}$.

§. 11. Eben so findet man, daß die Anzahl der Combinationen von sieben verschiedenen Elementen $= 35$, oder $= \frac{7.6.5}{3.2.1}$ ist.

§. 12. Vergleicht man die Ausdrücke $\frac{4.3.2}{3.2.1}$, $\frac{5.4.3}{3.2.1}$, $\frac{6.5.4}{3.2.1}$ und $\frac{7.6.5}{3.2.1}$ mit einander, so kann man daraus die Formel für die Bestimmung der Anzahl der Combinationen von n verschiedenen Elementen für die Ternionen ableiten, es wird nemlich solche seyn: $\frac{n(n-1)(n-2)}{3.\ 2.\ 1.}$.

Z. B. Wie vielmal können 20 verschiedene Zahlen zu dreien verbunden werden? Hier ist $n = 20$, also $n - 1 = 19$ und $n - 2 = 18$.

Folg-

Folglich $\frac{n(n-1)(n-2)}{3.\ 2.\ 1} = \frac{20.\ 19.\ 18}{6}$ oder $= 20.\ 19.\ 3$, d. i. $= 1140$.

Ferner: Wie viele Ternen enthalten die 90 Nummern einer Zahlenlotterie? Hier ist $n = 90$, also $n - 1 = 89$ und $n - 2 = 88$. Folglich $\frac{n(n-1)(n-2)}{3.\ 2.\ 1} = \frac{90.\ 89.\ 88}{6}$ oder $= 117480$. Wer also blos auf Ternen spielen und alle Ternen besetzen wollte, und zwar mit Zetteln, von welchen ieder drei Nummern von den 90 enthielte, so daß die drei Nummern eines Zettels mit den drei Nummern irgend eines andern Zettels nicht einerlei wären, müßte 117480 solcher Zettel besetzen. Alsdann würde er aber bei der Ziehung 10 Ternen ganz gewiß gewinnen, (weil 5 Nummern gezogen werden, die 10 Ternen enthalten,) oder zehn von seinen Zetteln würden Treffer seyn. Gesetzt nun, er setze auf die Terne einen Kreuzer, und sie werde im Errathungsfall 5400mal bezahlt, so erhält er 54000 Kreuzer, oder 900 fl. Seine Einlage aber beträgt 117480 Kreuzer, oder 1958 fl.

3) Von den Verbindungen zu vieren, oder den Combinationen für die Quaternionen.

§. 13. Auf ähnliche Art kann man zeigen, daß die Anzahl der Verbindungen von n verschiedenen Elementen zu vieren, sey $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.\ 3.\ 2.\ 1}$.

Z. B.

Z. B. Wie viele Quaternen enthalten die 90 Nummern einer Zahlenlotterie? Hier ist $n = 90$, also $n - 1 = 89$, $n - 2 = 88$ und $n - 3 = 87$. Folglich ist $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4. \; 3. \; 2. \; 1}$ $= \frac{90. \; 89. \; 88. \; 87}{4. \; 3. \; 2. \; 1}$, d. i. $= 30. \; 89. \; 11. \; 87.$ oder 2555190 Quaternen.

4) Von den Verbindungen zu fünfen, oder den Combinationen für die Quinionen.

§. 14. Eben so kann man zeigen, daß die Anzahl der Verbindungen von n verschiedenen Elementen zu fünfen sey $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5. \; 4. \; 3. \; 2. \; 1.}$.

Z. B. Wie viele Quinternen enthalten die 90 Nummern einer Zahlenlotterie? Hier ist $n = 90$, also $n - 1 = 89$, $n - 2 = 88$, $n - 3 = 87$, $n - 4 = 86$, folglich ist die Anzahl der Quinternen $= \frac{90. \; 89. \; 88. \; 87. \; 86}{5. \; 4. \; 3. \; 2. \; 1}$, d. i. $= 18. \; 89. \; 11. \; 29. \; 86$ oder 43949268.

5) Von den Combinationen für die mte Classe.

§. 15. Wenn n verschiedene Elemente so zu verbinden sind, daß in jeder einzelnen Verbindung, oder in jeder Complexion sich m verschiedene Elemente befinden, und zwar so, daß eine Complexion nicht aus den nemlichen Elementen besteht, aus denen

denen irgend eine andere zusammengesetzt ist, so ist die Frage, wie die Anzahl dieser Combinationen gefunden wird.

Wenn man die Formeln für die Anzahl der Combinationen von n verschiedenen Elementen für die Binionen, Ternionen, Quaternionen und Quinionen, die vorhin angegeben wurden, mit einander vergleicht, so sieht man leicht, daß die Anzahl der Combinationen von n verschiedenen Elementen für die mtinionen so ausgedruckt werden muß:

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\ldots[n-(m-1)]}{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\ldots[m-(m-1)]}.$$

§. 16. Z. B. Aus einem Kartenspiel von 32 Karten, soll man, ohne zu wählen, 15 Blätter ziehen. Auf wie vielerlei Arten können die gezogenen Karten zusammengesetzt seyn. Hier ist $n = 32$ und $m = 15$, also ist $m - 1 = 14$, folglich $n - (m - 1) = 32 - 14$, d. i. $= 18$ und $m - (m - 1) = 15 - 14$, d. i. $= 1$. Daher ist die Formel zur Berechnung dieses Falls

$$\frac{32.\ 31.\ 30.\ 29.\ 28.\ 27.\ 26.\ 25.\ 24.\ 23.\ 22.\ 21.\ 20.\ 19.\ 18}{15.\ 14.\ 13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}$$

Nun kann man zur Bequemlichkeit der Rechnung im Zähler und Nenner heben, nemlich 15 in 30 geht zweimal, 14 in 28 zweimal u. s. f. so erhält man endlich:

8. 31. 29. 9. 5. 23. 2. 19. 2

oder, wenn man wirklich multiplicirt: 565722720, welche Zahl die verschiedenen Arten angiebt.

Wenn

Wenn iemand blos auf Quaternen in die Zahlenlotterie spielen, und weil die 90 Nummern 2555190 Quaternen enthalten, (§. 13,) eben so viele Zettel ieden mit vier Nummern, so daß die vier Nummern eines Zettels mit den vier Nummern irgend eines andern Zettels nicht einerlei wären, besetzen wollte, würde er gewinnen oder verlieren, wenn die Quaterne 60000mal bezahlt wird? Da die fünf gezogenen Nummern fünf Quaternen enthalten, nach §. 13. und da nach der Voraussetzung alle möglichen Quaternen besetzt sind, so gewinnt er fünf Quaternen, die 300000 Kr. oder 5000 fl. betragen, wenn die Quaterne mit einem Kreuzer besetzt wurde. Sein Einsatz aber beträgt 2555190 Kr. oder 42586 fl. 30 Kreutzer.

Exempel zur Uebung.

1) Beim Lombrespiel werden von 40 Karten, iedem von den drei Spielern 9 Karten gegeben. Es ist die Frage, wie groß die Menge der verschiedenen Spiele ist, die einer beym Ausgeben der Karten in die Hand bekommen kann? Antw. 273438880. (Es wird nemlich die Anzahl der Combinationen von 40 Elementen zu Neunen gesucht.)

2) Beim Piquetspiel werden von 32 Karten iedem Spieler 12 Karten gegeben, wie viele verschiedene Spiele kann einer beim Austheilen der Karten in die Hand bekommen? Antw. 225792840.

3) Wenn

3) Wenn beim Whistspiel von 52 Karten, jedem von den vier Spielern 13 Karten gegeben werden, wie viele verschiedene Spiele kann einer beim Austheilen der Karten bekommen? Antwort. 635013559600.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Variationen.

1) Von den Variationen ohne Wiederholungen.

§. 1.

Die Variationen enthalten, ausser Combinationen, auch die Permutationen der gegebenen Elemente für die gegebene Classe, das heißt: für die Binionen, Ternionen 2c. Es seyen z. B. die gegebenen Elemente a, b, c, d zu zweien zu variiren. Man fange mit a an, nehme also die übrigen Elemente b, c, d, setze sie nach der alphabetischen Folge hin, und verbinde mit jedem das a, so erhält man, ab, ac, ad, hierauf lasse man von den gegebenen Elementen das zweite b weg, setze die übrigen a, c, d nach der alphabetischen Folge hin, und verbinde mit jedem davon das b, so erhält man ba, bc, bd, alsdann lasse man von den gegebenen Elementen das dritte, c weg, setze die übrigen, a, b, d nach der Folge hin, und verbinde mit

mit iedem davon das c, so erhält man ca, cb, cd, endlich lasse man von den gegebenen Elementen das vierte, d weg, setze die übrigen a, b, c nach der Folge hin, und verbinde mit iedem davon das d. Vermittelst dieses Verfahrens erhält man folgendes Schema:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Hier stellen nun die Complexionen ab, ac, ad, bc, bd, cd die Combinationen der gegebenen vier Elemente zu zweien vor, die übrigen Complexionen ba, ca, da, cb, db dc aber können so angesehen werden, als seyen sie blos durch Umtauschung entstanden, nemlich ba aus ab, ca aus ac u. s. f.

Die Anzahl der Variationen von vier Elementen zu zweien, ist also = 12, oder = 4. 3. Es sey ferner die Aufgabe, vier gegebene Elemente a, b, c, d zu dreyen zu variiren. Man lasse zuerst a weg, nehme die übrigen Elemente b, c, d und variire sie zu zweien, auf die Art, wie eben gezeigt wurde, dann setze man ieder der sechs erhaltenen Complexionen das a vor. Hierauf lasse man von den vier gegebenen Elementen das b weg, nehme die übrigen Elemente a, c, d, variire sie gleichfalls zu zweien, und setze ieder von den sechs erhaltenen Complexionen das b vor, u. s. f. so erhält man folgendes Schema:

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

Also ist die Anzahl der Variationen von vier Elementen zu dreien = 24, oder = 4. 3. 2.

§. 2. Ueberhaupt ist die Anzahl der Variationen von n Elementen für die mtinionen = n(n — 1) (n — 2) . . . . . [n — (m — 1)].

Z. B. Wie vielmal können sechs verschiedene Elemente zu vieren variirt werden? Hier ist n = 6, m = 4, also n — (m — 1) = 6 — (4 — 1) oder = 6 — 3, d. i. = 3, folglich ist die gesuchte Anzahl der Variationen = 6.5.4.3, d. i. = 360.

2) Von den Variationen mit Wiederholungen.

§. 3. Variationen mit Wiederholungen heißen die, unter deren Complexionen auch solche vorkommen, die den nehmlichen Buchstaben, oder das nehmliche Element mehrere mal enthalten.

Es seyen z. B. die vier gegebenen Elemente a, b, c, d zu zweien mit Wiederholungen zu variiren. Man setze alle die gegebenen Elemente nach der Folge hin, und vor iedes das erste Element a, dann setze man wieder alle die gegebenen

Elemente nach der Folge hin, und vor iedes das zweite Element b, und so immer fort, so erhält man folgendes Schema:

aa	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

Es seyen ferner die vier gegebenen Elemente a, b, c, d zu dreien mit Wiederholungen zu variiren. Man variire zuerst alle vier gegebenen Elemente a, b, c, d zu zweien, wie eben gezeigt wurde, und setze allen den sich ergebenden Complexionen aa, ab, ac u. s. f. das erste Element a vor, so erhält man aaa, aab, aac, aad, aba u. s. f. bis add. Hierauf setze man den nehmlichen Complexionen aa, ab, ac u. s. f. das zweite gegebene Element b vor, so erhält baa, bab, bac u. s f. bis bdd. Sodann setze man den nehmlichen Complexionen das dritte gegebene Element c vor, so erhält man caa, cab, cac u. s. f. bis cdd, und so fahre man fort, biß das letzte gegebene Element vorgesetzt ist.

Auf diese Art werden sich in allem 64 Complexionen, deren iede drei Elemente enthält, ergeben.

§. 4. Beim Würfelspiel kann die Frage aufgeworfen werden, wie viele Würfe mit einer gewissen Anzahl Würfel möglich sind? Die Auflösung hängt mit der Theorie der Variationen,

wobei

wobei Wiederholungen statt finden, zusammen. Es ist nemlich bekannt, daß ein Würfel sechs Seitenflächen hat, und daß folglich mit einem einzigen Würfel sechs verschiedene Würfe gemacht werden können. Bei zwei Würfeln aber finden sechs und dreißig Würfe statt. Denn man nehme an, die sechs Seitenflächen eines ieden Würfels seyen mit den sechs Buchstaben a, b, c, d, e, f bezeichnet, nehmlich iede Seitenfläche mit einem andern Buchstaben, die erste mit a, die zweite mit b u. s. f. und gebe dem ersten Würfel eine beliebige Lage, so, zum Beispiel, daß die Seitenfläche a sich oben befindet. Nun gebe man dem zweiten Würfel seine sechs möglichen Lagen, während man den ersten in seiner Lage gelassen hat, so kommen nach und nach mit der Seitenfläche a des ersten Würfels, die sechs Seitenflächen des zweiten Würfels in Verbindung, und es ergeben sich folgende Variationscomplexionen aa, ab, ac, ad, ae, af. Hierauf gebe man dem ersten Würfel eine andere Lage, so daß die Seitenfläche b die obere ist, so können mit dieser Seitenfläche b wiederum alle sechs Seitenflächen des zweiten Würfels in Verbindung gebracht werden, und es ergeben sich folgende Complexionen ba, bb, bc, bd, be, bf. Wenn man so fortfährt, so ist klar, daß mit ieder der sechs Seitenflächen des ersten Würfels alle sechs Seitenflächen des zweiten in Verbindung gebracht werden können. Das giebt also in allem 6 mal 6 oder 36 Complexionen, die bei 6 Elementen a, b, c, d, e, f, wenn sie zu zweien

mit Wiederholungen variirt werden, statt finden. Nun nehme man an, es komme noch ein Würfel zu den zwei Würfeln hinzu, und es sey A der erste, B der zweite, und C der dritte Würfel, und die einzelnen Seitenflächen iedes Würfels seyen bezeichnet, wie vorhin. Wenn nun beim Würfel A, die Seitenfläche a oben ist, so stelle man B und C auch so, lasse A und B in ihrer Lage, und bringe nach und nach a, b, c, d, e, f des Würfels C in Verbindung damit, so ergeben sich die sechs Variationscomplexionen aaa, aab, aac, aad, aae, aaf. Nun lasse man A noch in seiner Lage, mache aber von B die Seitenfläche b zur obern, und bringe wiederum die sechs Seitenflächen von C damit in Verbindung, so erhält man wieder sechs Variationscomplexionen aba, abb, abc, abd, abe, abf, und so fahre man fort, bis die sechs Seitenflächen von B nach oben gekommen sind. Daraus ist klar, daß für die Seitenfläche a des Würfels A 6 mal 6 Variationscomplexionen zu dreien statt finden. Da nun das nemliche von ieder andern Seitenfläche des ersten Würfels A gilt, so ist die Anzahl der Variationen von sechs Elementen a, b, c, d, e, f mit Wiederholungen zu dreien = 6 mal 6 mal 6, oder = 216. Das heißt, es finden mit drei Würfeln 216 Würfe statt. Man erhält also lauter Potenzen von 6, und der Exponent der Potenz wird durch die Anzahl der Würfel bestimmt. Z. B. Bei vier Würfeln ist die Anzahl der Würfe = 6. 6. 6. 6, oder = 6^4, d. i. = 1296. Wenn also über-

überhaupt m Würfel sind, so ist die Anzahl der Würfe = 6^m, oder 6 erhoben auf die mte Potenz. Stellt man sich Spielwürfel mit mehr oder weniger Seitenflächen als sechs vor, und bezeichnet die Menge der Seitenflächen eines Würfels im allgemeinen mit n, so ist die Anzahl der Würfe bei solchen m Würfeln = n^m. Folglich wird auch die Anzahl der Variationen von n verschiedenen Elementen mit Wiederholungen, für die mte Classe seyn n^m.

Z. B. Wie ist die Anzahl der Variationen von 8 verschiedenen Elementen mit Wiederholungen für die Quintonen oder zu fünfen? Hier ist n = 8 und m = 5, folglich $n^m = 8^5$, das ist = 8. 8. 8. 8. 8 oder = 16777216.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Wie viele Würfe können mit fünf Würfeln gemacht werden? Antw. 7776.

2) Wie viele Würfe sind mit sechs Würfeln möglich? Antw. 46656.

3) Wie ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von 10 verschiedenen Elementen für die achte Classe, oder zu achten? Antwort. 100000000.

Dreizehnter Abschnitt.

Von den Permutationen mit Wiederholungen.

§. 1.

Wenn bei Versetzungen das nemliche Element mehreremal vorkommt, so heißen solche Versetzungen: Permutationen mit Wiederholungen.

§. 2. Wenn das nemliche Element zweimal vorkommt, so ergeben sich bei drei gegebenen Elementen a, a, b, drei Versetzungen. Man lasse nemlich das erste Element a weg, und permutire ab, so erhält man ab und ba, vor iede dieser zwei Complexionen setze man das a, so hat man die Ordnung, die sich mit a anfängt. Nun folgt die zweite Ordnung, die sich mit b anfängt. Man lasse also von den drei gegebenen Elementen aab, das b weg, nehme die übrigen beiden aa, und da diese blos einerlei Buchstaben enthalten, so findet dabei keine Permutation statt. Also setze man sogleich das b vor sie, so erhält man baa. Das Schema ist daher:

aab   baa
aba

Diese Anzahl der Permutationen ist die Hälfte der Anzahl der Permutationen von drei gegebenen verschiedenen Elementen, (10ter Abschnitt §. 2.). Da nun diese letztere ausgedrückt wird durch 1. 2. 3, (10 Abschn. §. 2.) so wird die Anzahl der Permutationen von drei gegebenen Elementen, bei denen das nemliche Element zweimal vorkommt, ausgedrückt, durch $\frac{1.\ 2.\ 3}{1.\ 2}$.

§. 3. Wenn das nemliche Element zweimal vorkommt, so finden bei vier Elementen a, a, b, c, zwölf Pernutationen statt. Man lasse nemlich von den vier gegebenen Elementen das erste a weg, permutire die übrigen drei a, b, c, nach 10. Abschn. §. 2. und setze vor iede der sechs erhaltenen Complexionen das a, so hat man die Ordnung, die sich mit a anfängt. Nun lasse man von den vier gegebenen Elementen das b weg, permutire die übrigen drei aac, (nach 13. Abschn. §. 2.) und setze vor iede der drei erhaltenen Complexionen das b, so hat man die Ordnung, die sich mit b anfängt. Endlich lasse man von den vier gegebenen Elementen das c weg, permutire die übrigen drei aab (nach 13. Abschn. §. 2.) und setze vor iede der drei erhaltenen Complexionen das c, so hat man die Ordnung, die sich mit c anfängt. Das Schema ist folgendes:

aabc	baac	caab
aacb	baca	caba
abac	bcaa	cbaa
abca		
acab		
acba		

Da

Da nun die Anzahl der Permutationen von vier verschiedenen Elementen 24 ist, und durch 1. 2. 3. 4 ausgedrückt wird, (10. Abschn. §. 3.) so ist die Anzahl der Permutationen von vier Elementen, wobei das nemliche Element zweimal vorkommt, die Hälfte der Anzahl der Permutationen von vier verschiedenen Elementen, und kann folglich ausgedrückt werden durch $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{1.\ 2.}$.

Also wird die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn das nemliche Element zweimal vorkommt, ausgedrückt werden können durch $\frac{1.\ 2.\ 3.\ .\ .\ .\ n}{1.\ 2}$.

§. 4. Auf ähnliche Art kann man zeigen, daß die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn das nemliche Element dreimal vorkommt, ausgedrückt werden kann, durch $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ n}{1.\ 2.\ 3}$ und wenn das nemliche Element viermal vorkommt, durch $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ n}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$.

§. 5. Daraus folgt, daß die Anzahl der Permutationen von n Elementen, wenn das nemliche Element m mal vorkommt, ausgedrückt werden kann, durch $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ .\ .\ .\ .\ n}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ m}$.

Z. B. Wie ist die Anzahl der Permutationen von abbbbbcdef, d. h. von zehn Elementen, da das nemliche Element b 5mal vorkommt? Hier ist $n = 10$ und $m = 5$, also die gesuchte Anzahl

zahl $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$ oder wenn man hebt, $= 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10$, d. i. $= 30240$.

§. 6. Es können aber bei gegebenen Elementen auch zwei, drei und mehrere von ihnen mehreremal vorkommen. Z. B. Die gegebenen Elemente seyen aaabccddddde, hier sind in allem 11 Elemente, aber nur fünf verschiedene, a, b, c, d, e, auch kommt nicht nur a mehreremal vor, sondern auch c und d, ferner kommen sie nicht gleich vielmal vor, sondern a dreimal, c zweimal und d viermal. Wenn man diese Fälle genauer untersucht, so findet man, daß sich die Anzahl der Versetzungen durch folgende Formel bestimmen läßt:

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \dots \dots t}{(1.\ 2.\ 3. \dots l)(1.\ 2.\ 3. \dots m)(1.\ 2.\ 3. \dots p) \dots \text{u. s. f.}}$$

Nemlich die Buchstaben, l, m, p u. s. w. bedeuten, wie vielmal iedes Element vorkommt, t bedeutet die Summe von l, m, p u. s. w. und der Producte im Nenner müssen so viele seyn, als verschiedene Elemente vorhanden sind.

Z. B. Die gegebene Complexion sey a, a, a, b, c, c, d, d, d, d, e, für welche die Anzahl der Versetzungen vermittelst dieser Formel gefunden werden soll, so ist $l = 3$ (denn a kommt dreimal vor,) m ist $= 1$, (denn b kommt einmal vor,) $p = 2$ (denn c kommt zweimal vor,) q ist $= 4$, (denn d kommt viermal vor,) r ist $= 1$, (denn e kommt einmal vor.) Nun ist $t = l +$

m

$m + p + q + r$, also $t = 3 + 1 + 2 + 4 + 1$ d. i. $= 11$, daher ist für diesem Fall die Anzahl der Versetzungen

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ 11}{(1.\ 2.\ 3)\ (1)\ (1.\ 2)\ (1.\ 2.\ 3.\ 4)\ (1)}$$

$$\text{oder} = \frac{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.\ 11}{2.\ 2.\ 3.\ 4}$$

oder $= 5.\ 2.\ 7.\ 2.\ 9.\ 10.\ 11$, d. i. $= 138600$.

Es sey ferner die gegebene Complexion a, a, b, b, b, b, c, d, so ist $l = 2$, $m = 4$, $p = 1$, $q = 1$; da nun $t = l + m + p + q$, oder $t = 8$, so ist die Anzahl der Versetzungen

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.}{(1.\ 2.)\ (1.\ 2.\ 3.\ 4.)\ (1)\ (1)}$$

$$\text{oder}\ \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}{2.\ 3.\ 4.},\ \text{d. i.} = 840.$$

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist die Anzahl der Versetzungen von a, a, a, b, b, b, b, b, c, c? Antw. 2520.

2) Wie ist die Anzahl der Versetzungen von a, b, b, b, c, d, e, f? Antw. 6720.

3) Wie ist die Anzahl der Versetzungen von a, a, b, b, c, c, d, d, e, e, f, f? Antw. 7484400.

4) Wenn ein Verfertiger von Anagrammen sich mit dem Wort aurora beschäftigen wollte, wie viele Versetzungen finden in Rücksicht der Buchstaben überhaupt dabei statt, damit er beurtheilen kann, ob er nicht mehrere unbenützt gelassen hat? Antw. 180.

5) Wie

5) Wie vielmal können die Buchstaben im Wort constantinopel versetzt werden? Antw. 363242880omal.

6) Wie vielmal können die Buchstaben im Wort amor versetzt werden? (Hier kommt nicht der nemliche Buchstabe mehreremal vor, also muß dieß nach §. 3. des zehnten Abschnitts beantwortet werden.) Antw. 24mal, worunter die Anagrammen roma, mora, Maro, oram, ramo, armo und der Name Omar sich befinden.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 1.

Man kann bei Spielen die Menge aller möglichen Fälle, sodann auch die Menge von Fällen für eine gewisse Absicht, berechnen, und die Menge der letztern mit der Menge aller vergleichen, so findet man, vermittelst dieser Vergleichung, wie viele allgemeine Fälle statt finden, bis ein einziger von den besondern, zu einer gewissen Absicht dienlichen, sich ereignet. Dieß giebt die Wahrscheinlichkeit, einen von den besondern Fällen zu erhalten, und die Rechnung, die auf dieses Resultat führt, heißt die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 2.

§. 2. Die Wahrscheinlichkeit wird also als ein bestimmter Grad der Gewißheit betrachtet, und verhält sich zu dieser, wie ein Theil zum Ganzen. Wenn nemlich die Gewißheit als ein Ganzes betrachtet, oder = 1 gesetzt wird, und man nimmt an, daß sie aus einigen Theilen, z. B. aus sieben Fällen bestehe, von welchen fünf für das Zutreffen einer gewissen Sache sind, zwei Fälle aber dagegen, so sagt man, diese Sache habe $\frac{5}{7}$ Gewißheit, oder die Wahrscheinlichkeit, daß diese Sache zutreffen werde, verhalte sich zur vollkommenen Gewißheit, daß sie sich ereignen werde, wie $\frac{5}{7}$ zu 1, und ferner die Wahrscheinlichkeit, daß diese Sache nicht zutreffen werde, verhalte sich zur vollkommenen Gewißheit, daß sie nicht zutreffen werde, wie $\frac{2}{7}$ zu 1. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß diese Sache zutreffen werde, zu der Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht zutreffen werde, wie $\frac{5}{7}$ zu $\frac{2}{7}$, d. ist. wie 5 zu 2.

Erstes Beispiel. Es soll bei einer Zahlenlotterie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Auszug zu hoffen ist, bestimmt werden, unter der Voraussetzung, daß nur eine Nummer besetzt wird.

Da die Zahlenlotterie 90 Nummern enthält, und fünf Nummern gezogen werden, die fünf Auszüge enthalten, so verhält sich die Menge der Errathungsfälle zur Menge alle Fälle, oder die Wahrscheinlichkeit einen Auszug zu bekommen zur Gewißheit, wie 5 zu 90, oder, (wenn man mit 5 hebt,) wie 1 zu 18, d. i. (wenn man die Gewißheit

wißheit = 1 setzt,) wie $\frac{1}{18}$ zu 1. Also ist die Wahrscheinlichkeit einen Auszug zu errathen = $\frac{1}{18}$.

Zweites Beispiel. Es soll die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Auszug zu hoffen ist, gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß nur eine Nummer besetzt wird. Da dieser unter den fünf gezogenen Nummern eine bestimmte Stelle haben muß, diese Stelle aber fünfmal geändert werden kann, so ist dieß eben soviel, als würde nur eine einzige Nummer von den 90 Nummern gezogen. Es verhält sich also die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Auszug zu bekommen zur Gewißheit wie 1 zu 90. Oder diese Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{90}$.

Man kann dieß auch so berechnen. Wenn iemand die 90 Nummern besetzt, so sind ihm fünf unbestimmte Auszüge gewiß. Bestimmt er nun ferner bei ieder der 90 Nummern, ob sie die erste, oder zweite, oder dritte, oder vierte, oder fünfte in der Ordnung bei der Ziehung seyn soll, so muß er von den 90 Nummern iede mit fünfmaliger Bestimmung besetzen, welches in allem 450 Sätze giebt, wobei ihm aber fünf bestimmte Auszüge gewiß sind. Folglich verhält sich die Menge der Errathungsfälle zur Menge aller Fälle, oder zur Gewißheit, wie 5 zu 450, d. i. wie 1 zu 90. Also ist, wenn man die Gewißheit = 1 setzt, die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Auszug zu errathen = $\frac{1}{90}$.

Drittes

Drittes Beispiel. Es soll bei einer Zahlenlotterie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Ambe, eine bestimmte Ambe, eine Terne, eine Quaterne und eine Quinterne zu hoffen ist, bestimmt werden, unter der Voraussetzung, daß man bei der Ambe nur zwei Nummern, bei der Terne, drei, bei der Quaterne, vier, und bei der Quinterne fünf Nummern besetzt.

1) Für die Amben. Die 90 Nummern enthalten 4005 Amben, (II. Abschnitt §. 7.) die fünf gezogenen Nummern enthalten 10 Amben (II. Abschn. §. 4.) folglich sind unter 4005 Fällen nur 10 Fälle für das Errathen der Ambe. Daher verhält sich die Menge der Errathungsfälle zur Menge aller Fälle, oder zur Gewißheit, wie 10 zu 4005, d. i. wie 1 zu $400\frac{1}{2}$, oder beinahe wie 1 zu 400. Also ist, wenn man die Gewißheit $= 1$ setzt, die Wahrscheinlichkeit eine Ambe zu errathen, beinahe $= \frac{1}{400}$.

2) Für die bestimmten Amben. Das bestimmte Ambenspiel ist so zu verstehen, daß der Zug, auf den iede der beiden Nummern kommen soll, für iede der beiden Nummern ausgedrückt seyn muß. Nun finden bei den fünf gezogenen Nummern zwanzig Versetzungen für eine bestimmte Ambe statt. Denn es seyen die fünf gezogenen Nummern, a, b, c, x und y, davon mögen x und y die beiden Nummern der bestimmten Ambe bedeuten. Da es nur auf die Stellen von x und y ankommt, übrigens aber gleichgültig ist, ob die

die andern drei Nummern nach der Folge a, b, c oder b, a, c oder in irgend einer andern gezogen werden, so kann man sich solche als eine Complexion mit Wiederholungen, oder als a, a, a vorstellen, in welchem Fall sich nach §. 4. des 13. Abschnitts 20 Versetzungen ergeben, wie folgendes Schema zeigt:

a,a,a,x,y	a,a,y,x,a	a,y,a,x,a	x,y,a,a,a
a,a,a,y,x	a,x,a,a,y	a,y,x,a,a	y,a,a,a,x
a,a,x,a,y	a,x,a,y,a	x,a,a,a,y	y,a,a,x,a
a,a,x,y,a	a,x,y,a,a	x,a,a,y,a	y,a,x,a,a
a,a,y,a,x	a,y,a,a,x	x,a,y,a,a	y,x,a,a,a

Nun sind in den fünf gezogenen Nummern zehn unbestimmte Amben und in allen 90 Nummern 4005 unbestimmte Amben enthalten, (11. Abschn. §. 4. und 7.) Besetzt also iemand diese 4005 unbestimmte Amben, so sind ihm 10 Amben gewiß. Bestimmt er hierauf bei iedem seiner Ambenzettel, in Rücksicht ieder der zwei darauf befindlichen Nummern, ob sie die erste, zweite rc unter den 5 bei der Ziehung herauskommenden Nummern seyn soll, so finden nach dem obigen Schema für iede Ambe 20 Versetzungen statt, folglich muß er in allem 20mal 4005 oder 80100 bestimmte Amben besetzen, dann sind ihm aber zehn bestimmte Amben gewiß. Also verhält sich die Menge der Errathungsfälle zur Menge aller Fälle wie 10 zu 80100, d. i. wie 1 zu 8010. Daher ist die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte

Ambe zu errathen = $\frac{1}{8010}$, wenn die Menge aller Fälle = 1 gesetzt wird.

3) Für die Ternen. Die 90 Nummern enthalten 117480 Ternen, (II. Abschn. §. 12.) und die fünf gezogenen Nummern enthalten 10 Ternen, (II. Abschn. §. 9.) also sind unter 117480 Fällen nur 10, bei denen eine Terne getroffen werden werden kann, oder wer 117480 Zettel, ieden mit drei Nummern gehörig besetzt, hat 10 Ternen ganz gewiß zu erwarten. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit eine Terne zu errathen zur Gewißheit wie 10 zu 117480, d. i. wie 1 zu 11748, oder wie $\frac{1}{11748}$ zu 1. Man kann also sagen, die Wahrscheinlichkeit eine Terne zu errathen sey = $\frac{1}{11748}$.

4) Für die Quaternen. Die 90 Nummern enthalten 2555190 Quaternen, (II. Abschn. §. 13.) die fünf gezogenen Nummern enthalten fünf Quaternen, (II. Abschn. §. 13.) wer also 2555190 Zettel, ieden mit vier Nummern besetzen wollte, würde ganz gewiß fünf Quaternen erhalten. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit eine Quaterne zu errathen, zur Menge aller Fälle oder zur Gewißheit, wie 5 zu 2555190, d. i. wie 1 : 511038, oder diese Wahrscheinlichkeit ist, wenn man die Gewißheit = 1 setzt, = $\frac{1}{511038}$.

5) Für die Quinternen. Die 90 Nummern enthalten 43949268 Quinternen, (II. Abschnitt, §. 14.) die fünf gezogenen Nummern aber nur

nur eine. Wer also eine Quinterne gewiß haben wollte, müßte 43949268 Zettel, jeden mit fünf Nummern, besetzen. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit eine Quinterne zu errathen, zur Menge aller Fälle, wie 1 zu 43949268, oder diese Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{1}{43949268}$. Wer daher hoft, eine Quinterne zu errathen, der erwartet, daß unter 43949268 Fällen der eintreffen wird, den er wünscht, wogegen 43949267 Fälle sind. Also kann man sagen, die Wahrscheinlichkeit eine Quinterne zu errathen, verhalte sich zur Wahrscheinlichkeit sie nicht zu errathen, wie 1 zu 43949267.

Viertes Beispiel. Wie groß ist beim Lombrespiel die Wahrscheinlichkeit, die Spadille und Baste gleich beim Kartengeben zu bekommen?

Bei diesem Spiel werden 40 Karten gebraucht, von denen unter drei Spielern 27 ausgetheilt werden, so daß ieder neun Blätter bekommt. Wenn nun 40 Blätter zu zweien verbunden werden, so finden 780 Combinationen statt, (II. Abschn. §. 7.) werden aber neun Blätter, welche man in die Hände bekommt, zu zweien verbunden, so finden 36 Combinationen statt. Also sind unter 780 Fällen nur 36, bei denen die beiden gedachten Karten erhalten werden können. Daher verhält sich die Wahrscheinlichkeit ein Paar bestimmte Karten (zum Beispiel, Spadille und Baste,) zu bekommen, zur Menge aller Fälle, wie 36 zu 780, d. i. wie 1 zu $21\frac{2}{3}$, oder beinahe wie 1 zu 21, d. i. wie $\frac{1}{21}$ zu 1. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, die

Spadille und Baste gleich beim Kartengeben zu erhalten, $= \frac{1}{21}$.

Fünftes Beispiel. Gesetzt, jemand bekäme die beiden gedachten Blätter nicht beim Kartengeben, und wollte sie kaufen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dazu?

Die Anzahl der Karten der beiden übrigen Spieler beträgt 18, dazu die 13 liegengebliebenen addirt, macht 31. Werden diese 31 Blätter zu zweien verbunden, so giebt dieß $\frac{31 \cdot 30}{2}$ oder 465 Combinationen, werden aber die 13 liegengebliebenen zu zweien verbunden, so giebt dieß $\frac{13 \cdot 12}{2}$ oder 78 Combinationen. Unter 465 Combinationen sind also nur 78, bei denen die beiden gedachten Karten unter den 13 liegengebliebenen sich befinden, folglich gekauft werden können. Daher verhält sich die Menge aller Fälle A zur Wahrscheinlichkeit B, (daß die gedachten beiden Blätter gekauft werden können,) wie 465 zu 78. Gesetzt nun, es werden n Karten gekauft, so finden bei solchen $\frac{n(-1)}{2}$ Verbindungen zu zweien statt. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit B, zur Wahrscheinlichkeit C (daß nemlich die beiden gedachten Karten unter den n gekauften sich befinden,) wie 78 zu $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$\text{Da nun } A : B = 465 : 78$$
$$\text{und } B : C = 78 : \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{so folgt, daß } A : C = 465 : \frac{n(n-1)}{2}$$

Gesetzt

Gesetzt also, man kaufe drei Karten, so ist $n = 3$, folglich $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2}$, d. i. $= 3$, daher A zu C wie 465 zu 3, d. i. wie 155 : 1, also die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{155}$. Man setze ferner, daß 9 Karten gekauft werden, (welches die größte Anzahl von Blättern ist, die gekauft werden kann,) so ist $n = 9$, also $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2}$ oder 36. Folglich verhält sich A zu C wie 465 zu 36, oder beinahe wie 13 zu 1. Also ist die Wahrscheinlichkeit die beiden Blätter in diesem Fall zu kaufen, beinahe $= \frac{1}{13}$.

Fünftes Beispiel. Es wettet A mit B, daß wenn er aus den 40 Blättern eines Lombrespiels vier Blätter ziehen würde, solche von vier verschiedenen Farben seyn würden. Es fragt sich, wie sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A zu der des B verhält?

Man verbinde die 40 Blätter zu vieren, so ist die Anzahl dieser Verbindungen 91390 (II. Abschnitt, §. 13.)

Nun stelle man sich statt der 40 Blätter von viererlei Farben eben so viele Seitenflächen von vier Würfeln vor. Nemlich, weil in diesem Kartenspiel zehn Karten einerlei Farbe haben, so gedenke man sich ieden dieser vier Spielwürfel von der Form eines Körpers mit zehn Seitenflächen, und auf diesen zehn Seitenflächen eines ieden Würfels, die zehn Blätter von der nemlichen Farbe

be angebracht, so werden so viele Fälle von vier Karten, wovon iede eine andere Farbe hat, möglich seyn, als verschiedene Würfe mit diesen Würfeln möglich sind. Die Anzahl dieser Würfe läßt sich aber nach §. 4. des 12. Abschnitts bestimmen. Denn mit m Würfeln, von denen ieder n Seitenflächen hat, sind n^m Würfe möglich. Nun ist in diesem Fall $m = 4$ und $n = 10$, also $n^m = 10^4$, d. i. $= 10 . 10 . 10 . 10$ oder 10000. Folglich sind eben so viele verschiedene Fälle, bei dem Herausziehen von vier Karten, wovon iede eine andere Farbe hat. Nun sind in allem 91390 Verbindungen dieses ganzen Kartenspiels zu vieren. Davon sind, vermöge des Erwiesenen, 10000 von der Beschaffenheit, daß iede Karte von einer andern Farbe ist. Folglich sind 81390 von der entgegengesetzten Beschaffenheit. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A, zu der des B wie 10000 zu 81390, d. i. wie 1000 zu 8139, oder fast wie 1 zu 8. Daher darf bei dieser Wette B achtmal so viel setzen als A.

Sechstes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus den 40 Blättern eines Lombrespiels vier bestimmte Blätter herauszuziehen, und ferner wie groß ist solche, diese 4 Blätter in einer bestimmten Ordnung zu ziehen, z. B. von Coeur, zuerst As, dann Roi, dann Dame und endlich Valet?

Die Anzahl aller Combinationen der 40 Blätter zu vieren ist 91390. Unter diesen kommt nun die

die verlangte Verbindung einmal vor. Also ist die erste gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{91390}$.

Für den zweiten Fall suche man die Anzahl der Variationen, ohne Wiederholungen, von 40 Elementen für die vierte Classe, (nach 12 Abschn. §. 2.) so findet sich die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2193360}$.

Siebentes Beispiel. Es wettet A mit B, daß wenn er aus den 40 Blättern eines Lombrespiels 9 Blätter zöge, vier bestimmte darunter seyn würden, z. B. Coeur As, Coeur Roi, Coeur Dame und Coeur Valet. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A zu der des B?

Die Anzahl aller Verbindungen der 40 Blätter zu vieren ist 91390. (11. Abschn. §. 3.)

Die Anzahl aller Verbindungen von 9 Blättern zu vieren ist 126. (11. Abschn. §. 3.)

Also verhält sich die Menge der Errathungsfälle zu der Menge der Nichterrathungsfälle wie 126 zu 91264, oder fast wie 1 zu 724.

Dieß kann man auch auf folgende Art berechnen. Man nehme die vier bestimmten Blätter von den 40 Blättern des Kartenspiels weg, so bleiben 36 Blätter. Dann suche man die Anzahl der Verbindungen dieser 36 Blätter zu fünfen, d. h. wie vielmal einer 5 verschiedene Blätter aus den 36 bekommen kann. Diese ist 376992 (11. Abschn. §. 14.) Stellt man sich nun vor, es werden zu ieder dieser Combinationen die vier bestimmten Blätter gelegt, so giebt dieß 376992

Fälle, und ieder derselben besteht aus 9 Blättern, unter denen sich die vier bestimmten befinden. Hierauf suche man die Anzahl der Verbindungen von 40 Blättern zu neunen (11. Abschn. §. 15.) Diese beträgt 273438880. Also verhält sich die Menge der Verbindungen, da sich unter 9 Karten die vier bestimmten befinden, zur Menge aller Verbindungen, deren iede aus 9 Karten überhaupt besteht, wie 376992 zu 273438880. Wenn man nun von der letztern Zahl die erstere subtrahirt, so zeigt der Rest, daß es 273061888 Fälle giebt, da unter 9 Karten die vier bestimmten nicht zusammen enthalten sind. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A zu der des B, wie 376992 zu 273061888, d. i. (wenn man mit 2992 hebt,) wie 126 zu 91264, oder fast wie 1 zu 724.

Achtes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus den 40 Blättern eines Lombrespiels 9 Blätter herauszuziehen, daß vier von der nemlichen bestimmten Farbe, z. B. vier Coeurblätter, und zwar nicht mehr und nicht weniger, von dieser Farbe darunter sind.

Die Anzahl der Combinationen von 40 Blättern zu neunen ist 273438880 (11. Abschn. §. 15.) Man subtrahire die Anzahl aller im Kartenspiel befindlichen Coeurblätter, (nemlich hier 10,) von der Menge aller im Spiel befindlichen Blätter, (hier von 40,) und verbinde den Rest, (hier 30) zu fünfen, das heißt, zu dem was übrig bleibt,

wenn

wenn man die Anzahl der zu ziehenden Blätter der nemlichen Farbe, (hier 4,) von der Anzahl aller zu ziehenden Blätter, (hier 9,) subtrahirt, so ist (II. Abschn. §. 14.)

$$\frac{30.\ 29.\ 28.\ 27.\ 26}{5.\ \ 4.\ \ 3.\ \ 2.\ \ 1} = 142506.$$

Dieses ist die Anzahl der Verbindungen in denen kein Blatt von der bestimmten Farbe, (hier von Coeur) vorkommt, und wovon iede aus fünf Blättern besteht, also können zu ieder die nemlichen 4 Blätter von den 10 Coeurblättern gelegt werden, um lauter Häufchen, wovon iedes aus 9 Blättern besteht, zu bekommen, von denen iedes die nemlichen 4 Coeurblätter enthält. Allein da 10 Coeurblätter sind, so kann man nun das Hinzuthun von andern 4 Coeurblättern so vielmal wiederholen, so vielmal sich 10 Blätter zu vieren combiniren lassen. Die Anzahl dieser Combinationen ist $\frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{4.\ 3.\ 2.\ 1}$ oder 210. Man multiplicire also 142506 mit 210, das Product ist 29926260, und bedeutet dieienige Menge der aus 9 Blättern bestehenden Haufen, von denen ieder vier von den 10 Coeurblättern enthält: und zwar so, daß iede Menge, die aus 142506 Haufen besteht, einerlei Coeurblätter enthält, aber nicht die nemlichen, die sich in einer andern Menge, von eben so vielen Haufen, befinden. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit, 9 Blätter von der nemlichen bestimmten Farbe zu ziehen, zur Anzahl

zahl der Verbindungen der 40 Blätter zu neunen, wie 29926260 zu 273438880, d. i. fast wie 1 : 9, oder die gedachte Wahrscheinlichkeit ist beinahe $= \frac{1}{9}$.

Neuntes Beispiel. Es wettet A mit B, er wolle aus einem Lombrespiel 9 Blätter ziehen, ohne daß sich ein Coeurblatt darunter befinde. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A zu der des B?

Die Anzahl der Verbindungen von 40 Blättern zu neunen ist 273438880. Die Anzahl der Verbindungen von 30 Blättern, (nemlich die 10 Coeurblätter von den 40 Blättern weggerechnet,) zu neunen, ist 14307150, unter dieser Anzahl Verbindungen befindet sich nemlich kein Coeurblatt. Folglich sind 259131730 Verbindungen, die Coeurblätter enthalten. Daher verhält sich die Wahrscheinlichkeit des A, zu der des B, wie 1430715 zu 25913173, d. i. beinahe wie 1 zu 18 oder wie $\frac{1}{18}$ zu 1.

Zehntes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus den 40 Blättern eines Lombrespiels 9 Blätter herauszuziehen, so daß wenigstens vier von der nemlichen bestimmten Farbe, z. B. von Coeur darunter sind, doch dürfen auch mehrere darunter seyn.

Man verfahre zuerst wie im achten Beispiel, um das Product 29926260 zu erhalten.

Auf

Auf ähnliche Art setze man nun die Rechnung fort, um die Menge der aus 9 Blättern bestehenden Haufen zu finden, in denen 5 Coeurblätter, ferner 6 Coeurblätter, und so fort bis zu 9 Coeurblättern vorkommen.

Das heißt, man verbinde 30 zu vieren, und 10 zu fünfen, und multiplicire beide Combinationszahlen mit einander, so hat man die Menge der Haufen von 9 Blättern, in deren iedem 5 Coeurblätter befindlich sind.

Ferner verbinde man 30 zu dreien und 10 zu sechsen, und multiplicire beide Combinationszahlen mit einander, um zu bestimmen, wie groß die Menge der Haufen von 9 Blättern ist, in deren iedem 6 Coeurblätter vorkommen.

Hierauf verbinde man 30 zu zweien und 10 zu sieben, und multiplicire die beiden Combinationszahlen mit einander, so hat man die Menge der aus 9 Blättern bestehenden Haufen, in deren iedem 7 Coeurblätter vorkommen.

Weiter verbinde man 10 zu achten, und multiplicire die Combinationszahl mit 30, für die Bestimmung der Menge der Haufen, die aus 9 Blättern bestehen und wovon ieder acht Coeurblätter enthält.

Endlich verbinde man 10 zu neunen, für die Bestimmung der Menge von Haufen, wovon ieder aus 9 Coeurblättern besteht.

Sodann

Sodann addire man alle diese berechneten Zahlen, nemlich:

für 4 Bl.	Coeur	29926260
für 5 Bl.	Coeur	6906060
für 6 Bl.	Coeur	852600
für 7 Bl.	Coeur	52200
für 8 Bl.	Coeur	1350
für 9 Bl.	Coeur	10
	Summe	37738480

Diese Summe deutet diejenige Menge Verbindungen der 40 Blätter des Lombrespiels zu neunen an, deren jede mehrere, wenigstens vier Coeurblätter enthält.

Es ist aber die Anzahl aller Verbindungen dieser 40 Blätter zu neunen 273438880, folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit wenigstens 4 Coeurblätter unter den neun gezogenen Karten zu bekommen, zur Menge aller Fälle wie 37738480 zu 273438880 oder, wenn man mit 1040 hebt, wie 36287 zu 262922, das ist beinahe wie 2 zu 15, oder die gedachte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{2}{15}$.

Eilftes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn in der Lotterie fünf Nummern auf einem Zettel besetzt werden, nicht mehr und nicht weniger als eine Terne zu errathen?

Die 90 Nummern zu fünfen verbunden, geben 43949268 Verbindungen (II. Abschn. §. 14.)

Werden

Werden die fünf besetzten Nummern von 90 subtrahirt, und der Rest zu zweien verbunden, so geben diese 85 Nummern 3570 Verbindungen. (II. Abschn. §. 7.)

Werden endlich die fünf besetzten Nummern zu dreien verbunden, so erhält man 10 Verbindungen (II. Abschn. §. 9.). Man multiplicire hierauf 3570 mit diesem 10, so bestimmt das Product 35700 die Menge von Verbindungen, deren iede fünf Nummern enthält, unter welchen sich allemal drei von den besetzten Nummern befinden. (Denn iede der 3570 Verbindungen besteht nur aus zwei Nummern, also können zu ieder die nemlichen drei Nummern von den fünf besetzten hinzugefügt werden, um Verbindungen zu fünfen zu bekommen, von denen iede die drei gedachten Nummern enthält. Da aber die fünf besetzten Nummern 10 Verbindungen zu dreien geben, so kann bei den 3570 Verbindungen zu zweien, das Hinzusetzen von drei Nummern, die nicht mit den vorigen einerlei sind, zehnmal wiederholt werden, dieß giebt 35700 Verbindungen.) Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den fünf besetzten Nummern eine Terne zu errathen, zur Menge aller Fälle wie 35700 zu 43949268, oder beinahe wie 1 zu 1231, das heißt, sie ist $= \frac{1}{1231}$.

Zwölftes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn in der Lotterie fünf Nummern auf

auf einem Zettel besetzt werden, **wenigstens** eine Terne zu errathen, so daß auch Quaternen in Anschlag kommen?

Zuerst rechne man wie im 11ten Beispiel, um für die Ternen das Product 35700 zu bekommen.

Hierauf verbinde man 85, (das heißt, den Rest, wenn die fünf besetzten Nummern von 90 subtrahirt worden sind) zu Eins, dieß giebt 85.

Ferner verbinde man die fünf besetzten Nummern zu vieren, (wegen der Quaternen,) dieß giebt fünf Verbindungen. Dann multiplicire man die 85 mit diesem 5, das Product 425 bestimmt die Menge von Verbindungen, deren iede aus fünf Nummern besteht, unter welchem sich allemal viere von den besetzten Nummern befinden. (Denn iede der 85 Verbindungen besteht nur aus einer Nummer, also können zu ieder die nemlichen vier Nummern von den fünf besetzten hinzugefügt werden. Da aber diese fünf Nummern 5 Verbindungen zu vieren geben, so kann das Hinzufügen auf fünf verschiedene Arten wiederholt werden.)

Endlich addire man zu	35700
die Zahl	425
Summe	36125

Diese Summe bezeichnet dieienige Anzahl der Verbindungen der 90 Nummern zu fünfen, deren iede

iede wenigstens eine Terne von den besetzten Nummern enthält.

Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit mit fünf besetzten Nummern wenigstens eine Terne zu errathen zur Menge aller Verbindungen der 90 Nummern zu fünfen, wie 36125 zu 43949268, oder beinahe wie 1 zu 1216, oder sie ist fast $\frac{1}{1218}$.

Dreizehntes Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln einen Pasch zu werfen?

Bei drei Würfeln sind 90 Fälle möglich, wo auf der obersten Seitenfläche von zweien dieser Würfel eine gleiche Anzahl Augen sich zeigt.

Nemlich erstens sind bei drei Würfeln 15 Würfe möglich, in denen auf der Oberfläche eines ieden der zwei Würfel sechs Augen vorkommen. Denn es seyen die drei Würfel A, B und C, so können die sechs Augen entweder auf A und B, oder auf A und C, oder auf B und C sich befinden, welches drei Fälle sind. In Ansehung eines ieden dieser Fälle, sind aber fünf verschiedene Lagen des einen Würfels möglich, in so fern er nemlich nicht auch zugleich sechs Augen zeigen soll. Daraus entstehen in allem 3mal 5 oder 15 verschiedene Fälle. Da nun dieser Schluß auch für 2 Fünfer, für 2 Vierer ꝛc. gilt, so sind 6mal 15 oder 90 Fälle möglich, mit drei Würfeln einen Pasch zu werfen.

Da

Da nun mit drei Würfeln in allem 6mal 6mal 6, oder 216 Würfe möglich sind, (12. Abschnitt, §. 4.) so verhält sich die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu werfen, zur Menge aller Fälle, wie 90 zu 216, d. i. wie 5 zu 12, oder sie ist $= \frac{5}{12}$.

Wenn also einer mit einem andern wettet, er wolle mit drei Würfeln einen Pasch werfen, so wird sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des ersten zu der des zweiten verhalten, wie 90 zu 216 weniger 90, das ist wie 90 zu 126, oder wie 5 zu 7.

Aehnliche Exempel zur Uebung.

1) Aus einem Piquetspiel, das aus 32 Karten besteht, will iemand 9 Karten herausziehen, daß sich darunter fünf von einer bestimmten Farbe befinden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dazu? (Die Auflösung geschieht nach der Art, wie im achten Beispiel.) Antw. $\frac{12397}{584350}$ oder beinahe $\frac{1}{47}$.

2) In einem Glückstopf befinden sich 24 Marquen, nemlich 10 rothe, 8 schwarze, und 6 weiße. Wer zuerst 7 rothe Marquen, und darauf von den übrigen 17 Marquen 3 weiße zieht, erhält den besten Gewinn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dazu? (Man verbinde 24 zu sieben, 10 gleichfalls zu sieben, und setze die Menge aller Fälle $= 1$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für die 7 rothen Marquen. Dann verbinde man 17 zu dreien, 6 gleichfalls zu dreien, und setze

setze die Menge aller Fälle = 1, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für die 3 weisen Marquen. Endlich multiplicire man die beiden erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit einander, so hat man die gesuchte.) Antw. $\frac{1}{450314}$, also sehr gering.

3) Auf wie viele Arten können 19 verschiedene Kartenblätter, in vier Haufen von 2, 4, 5 und 8 Blättern abgetheilt werden? (Man suche die Anzahl der Verbindungen von 19 zu zweien, von 17 zu vieren, und von 13 zu fünfen, und multiplicire die gefundenen Verbindungszahlen mit einander.) Antw. Auf 523783260 verschiedene Arten.

4) Was ist wahrscheinlicher, aus 13 in einem Glückstopf befindlichen verschiedenen Nummern 6 bestimmte Nummern, oder aus einem Piquetspiel 8 bestimmte Karten zu ziehen? (Hier wird das Verhältniß der erstern Wahrscheinlichkeit zur zweiten gesucht. Man bestimme also die Anzahl der Verbindungen von 13 zu sechsen, und von 32 (als der Menge der Blätter des Piquetspiels) zu 8, so findet man die erstere Wahrscheinlichkeit = $\frac{1}{1716}$, und die zweite = $\frac{1}{10518300}$, folglich verhält sich die erste Wahrscheinlichkeit zur zweiten, wie $\frac{1}{1716}$ zu $\frac{1}{10518300}$, das ist wie 10518300 zu 1716, oder wenn man mit 156 hebt, wie 67425 zu 11, beinahe wie 6130 zu 1) Antw. Es ist über 6000 mal wahrscheinlicher aus

dem Glückstopf von 13 Nummern die 6 bestimmten, als aus 32 Karten 8 bestimmte zu ziehen.

5) Im Piquetspiel bekommt ieder der beiden Spieler 12 Karten, und die übrigen 8 werden als Kaufkarten zurückgelegt. Auf wie vielerlei Art kann die Austheilung unter die beiden Spieler geschehen? (Man verfahre, wie bei dem 3ten Exempel.) Antw. Auf 28443124054800 Arten.

6) Beim Whistspiel, das aus 52 Blättern besteht, wird das ganze Spiel ausgetheilt. Auf wie vielerlei Art kann diese Austheilung unter die vier Spieler geschehen?
Antw. Auf 53644737765488792839237440000 Arten.

7) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit vier Würfeln, ferner mit fünf, sechs, sieben und acht Würfeln, einen Pasch zu werfen, so daß sich auf der obersten Seite zweier Würfel eine gleiche Anzahl Augen zeigt, alle übrigen Würfel aber eine verschiedene Anzahl Augen zeigen? (Aus der Auflösung des 13 Beispiels, verbunden mit dem Satz, daß dem neu hinzugekommenen Würfel eine Lage weniger gegeben werden muß, als dem vorhergehenden, wenn er blos eine verschiedene Anzahl Augen zeigen soll, fließt folgende allgemeine Regel für m Würfel. Man multiplicire $\frac{m(m-1)}{2}$, (d. h. die Anzahl der Combinationen von m Würfeln zu zweien,) mit dem Product von ganzen Zah-

Zahlen, das sich von 6 anfängt, und aus $m-1$ Factoren besteht, wovon ieder folgende um 1 kleiner ist, als der vorhergehende, so giebt dieß die Zahl x, welche die Menge Würfe, die der gegebenen Bedingung Genüge leisten, andeutet. Da nun die Menge aller Würfe mit m Würfeln $= 6^m$, (12. Abschn. §. 4.) so ist die Wahrscheinlichkeit mit m Würfeln einen Pasch zu werfen, $= \frac{x}{6^m}$).

Antw. Für 4 Würfel ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{9}$, für sechs Würfel $= \frac{25}{108}$, für 7 Würfel $= \frac{35}{648}$, für acht Würfel $= 0$, oder dieser Fall ist unmöglich, so wie auch die Fälle, bei denen mehr als acht Würfel vorkommen.

8) A wettet mit B, daß er aus den 32 Blättern eines Piquetsspiels vier Blätter von vier verschiedenen Farben ziehen wolle. Wie ist das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen des A zu der des B? (Man verfahre bei der Auflösung nach dem fünften Beispiel.) Antw. Die des A verhält sich zu der des B, wie 512 zu 3983, d. i. fast wie 1 : 8.

Zusatz

zu der Darstellung der Permutationscomplexionen

Seite 275 und 296.

Auch können die Permutationen, sowohl ohne als mit Wiederholungen, in einer gut geordneten Folge der Complexionen dargestellt werden, wenn man immer die folgende Complexion aus der nächst-

vor-

vorhergehenden ableitet. Z. B. Es seien die gegebenen Elemente a, b, c, d. Man schreibe die Buchstaben nach der alphabetischen Ordnung neben einander. Hierauf suche man in dieser ersten Complexion, von der rechten nach der linken dasjenige Element auf, (hier d), vor welchem, nach der linken zu, zuerst ein früherer Buchstabe (hier c) steht, dafür (hier für c) substituire man den nächst spätern rechts stehenden Buchstaben (hier d) und neben diesem schreibe man rechts den umgetauschten (hier c), so hat man abdc, als die zweite Complexion. Aus dieser leite man die dritte eben so ab. Da nemlich in ihr, von der rechten zur linken auf d der frühere Buchstabe b folgt, so setze man statt b den nach alphabetischer Ordnung folgenden, und rechter Hand des b stehenden Buchstaben c, und das b selbst, nebst dem ihm zur rechten stehenden Buchstaben d setze man alphabetisch geordnet, (nemlich bd, nicht db,) zur rechten, so hat man die neue Complexion acbd. Aus ihr leite man auf ähnliche Art acdb ab, aus dieser eben so, (indem man statt c, das rechts stehende d substituirt, und das c selbst nebst b alphabetisch geordnet zur rechten setzt,) die Complexion adbc, ferner aus dieser adcb, und aus dieser, (indem man statt a das im Alphabet folgende b substituirt, und das a nebst dc alphabetisch geordnet rechts ansetzt) die Complexion bacd u. s. f. bis man endlich zur Complexion dcba kommt, welche die umgekehrte der ersten ist.

vorhergehenden ableitet. Z. B. Es seien die gegebenen Elemente a, b, c, d. Man schreibe die Buchstaben nach der alphabetischen Ordnung neben einander. Hierauf suche man in dieser ersten Complexion, von der rechten nach der linken dasjenige Element auf, (hier d), vor welchem, nach der linken zu, zuerst ein früherer Buchstabe (hier c) steht, dafür (hier für c) substituire man den nächst spätern rechts stehenden Buchstaben (hier d) und neben diesem schreibe man rechts den umgetauschten (hier c), so hat man abdc, als die zweite Complexion. Aus dieser leite man die dritte eben so ab. Da nemlich in ihr, von der rechten zur linken auf d der frühere Buchstabe b folgt, so setze man statt b den nach alphabetischer Ordnung folgenden, und rechter Hand des b stehenden Buchstaben c, und das b selbst, nebst dem ihm zur rechten stehenden Buchstaben d setze man alphabetisch geordnet, (nemlich bd, nicht db,) zur rechten, so hat man die neue Complexion acbd. Aus ihr leite man auf ähnliche Art acdb ab, aus dieser eben so, (indem man statt c, das rechts stehende d substituirt, und das c selbst nebst b alphabetisch geordnet zur rechten setzt,) die Complexion adbc, ferner aus dieser adcb, und aus dieser, (indem man statt a das im Alphabet folgende b substituirt, und das a nebst dc alphabetisch geordnet rechts ansetzt) die Complexion bacd u. s. f. bis man endlich zur Complexion dcba kommt, welche die umgekehrte der ersten ist.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Praktische Anweisung zur algebraischen und combinatorischen Rechnung in Beziehung auf bürgerliche Geschäfte mit einer methodisch geordneten Auswahl von brauchbaren Beispielen zur Selbstübung und für den ö
ffentlichen und Privatunterricht
Bd.: [1]

Nürnberg (1810)

Math.p. 369-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082448-3